Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №49»
г. Печора, Республика Коми

I Международной конференции учащихся
«НАУЧНО-ТВОРЧЕСКИЙ ФОРУМ»

Научно-исследовательская работа

«Одна формула за всех… формула Пика»

Направление:

«Математика»

Выполнил:
Зюзев Евгений Глебович
учащийся 9 «а» класса   класса
МОУ «СОШ №49», Россия, г. Печора

Патратий Елена Валерьевна,
научный руководитель
МОУ «СОШ №49», Россия, г. Печора

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Многие ученики сталкиваются с задачами на нахождение площади треугольника, параллелограмма, многоугольника и других геометрических фигур по рисунку на клетчатой бумаге. Применяя правила и теоремы из геометрии, ученик может запутаться или забыть, да и к тому же уходит много времени на дополнительное построение, а в условиях экзамена дорога каждая минута. Чтобы не тратить много усилий, времени и не вспоминать впопыхах теоремы, аксиомы, правила, существует теорема Пика, с помощью которой можно без проблем и траты времени вычислить площадь фигуры, расположенной на клетчатой бумаге.

Увидев такие задачи в контрольно–измерительных материалах ОГЭ и ЕГЭ, я решил обязательно исследовать задачи на клетчатой бумаге, связанные с нахождением площади изображённой фигуры.

Так и была определена **тема для исследования**: «Одна формула за всех… формула Пика».

Актуальность данного исследования состоит в том, что усвоение формулы может помочь школьникам, а особенно сдающим экзамены, быстро и легко решать задачи на вычисление площади различных фигур на клетчатой бумаге**.**

При решении задач на клетчатой бумаге нам не понадобится знание основ планиметрии, а будут нужны именно смекалка, геометрическое воображение и достаточно простые геометрические сведения, которые известны всем.

Также при решении таких задач возникает ощущение математических открытий на уровне, доступном каждому ученику.

Цель исследования:

Обосновать рациональность использования формулы Пика при решении задач на нахождение площади фигур, изображённых на клетчатой бумаге.

Для достижения мною были поставлены ***следующие задачи:***

1. Подобрать и изучить необходимую литературу по данной теме. Отобрать материал для исследования, выбрать главную, интересную, понятную информацию;
2. Проанализировать и систематизировать полученную информацию;
3. Решить задачи на нахождение площади фигур, изображённых на клетчатой бумаге геометрическим методом;
4. Найти различные методы и приёмы решения задач на клетчатой бумаге;
5. Сравнить и проанализировать результаты исследования.

Объект исследования: Задачи на клетчатой бумаге.

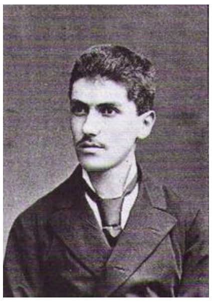
Предмет исследования: применение формулы Пика при решении задач на нахождение площади фигур, изображённых на клетчатой бумаге.

Методы исследования:

1. Эксперимент;
2. Сравнение;
3. Обобщение;
4. Анализ.
5. Опрос

Перед началом исследования я выдвинул следующую ***гипотезу:*** вычисление площади фигуры по формуле Пика обеспечит правильное и быстрое решение задачи по сравнению с вычислением площади фигуры по формулам планиметрии.

1. Историческая справка



Георг Александр Пик – австрийский математик, родился 10 августа 1859 года в Вене. Его отец – Адольф Йозеф Пик – будучи руководителем частного института, предпочёл до одиннадцати лет обучать сына на дому, а затем отдал его в четвёртый класс гимназии. В 1875 году Г.А. Пик сдал выпускные экзамены и поступил в Венский университет.

В 1876 году он опубликовал свою первую работу по математике, ему было всего лишь семнадцать лет. Он изучал математику и физику, университет окончил в 1879 году, получив возможность преподавать оба эти предмета. 16 апреля 1880 года Пик защитил докторскую диссертацию «О классе абелевых интегралов».

После защиты диссертации его утверждают на должность ассистента одного из ведущих физиков того времени, профессора Эрнста Маха, являющегося одновременно ректором Карлова университета в Праге – старейшего учебного заведения во всех славянских странах. За исключением академического 1884-1885 года, который Пик провёл в Лейпцигском университете, учась у Феликса Кляйна, он оставался в Праге до конца своей карьеры. В 1888 году он был назначен экстраординарным профессором математики, а затем ординарным профессором (полным профессором) в 1892 году в немецком университете в Праге.

В 1882 году произошло разделение Пражского университета на чешский (Карлов университет) и немецкий (Университет Карла-Фердинанда). Пик остался в Немецком университете. В 1884 году Пик уехал в Лейпцигский университет к Феликсу Клейну. Там он познакомился с другим учеником Клейна, Давидом Гильбертом. Позже, в 1885 году, он вернулся в Прагу, где и прошла оставшаяся часть его научной карьеры.

В 1900-1901 годах Георг Пик был деканом философского факультета Карлова университета и в 1911 году Пик оказался во главе комиссии, которая приняла на кафедру математической физика Альберта Эйнштейна. Они становятся близкими друзьями, совершая длительные пешие прогулки и беседуя, вместе музицируют.

Круг математических интересов Пика был чрезвычайно широк. В частности, им написаны работы в области функционального анализа и дифференциальной геометрии, эллиптических и абелевых функций, теории дифференциальных уравнений и комплексного анализа, всего более 50 тем. Широкую известность получила открытая им в 1899 году теорема Пика для расчёта площади многоугольника с вершинами в узлах клетки. В Германии эта теорема включена в школьные учебники. Широко известна она стала только лишь в 1969 году, после того, как Гуго Штейнгауз включил её в свою знаменитую книгу «Математический калейдоскоп».

Однако, в нашей стране данная формула выходит за рамки школьной программы, и мало кому известна, хотя является универсальной и отличается своей простотой.

2. Способы вычисления площади

Существует несколько способов вычисления площади многоугольника на клетчатой бумаге:

- Подсчет количества клеток;
- Применение формул планиметрии;
- Разбиение фигуры на более простые фигуры;
- Достроить фигуру до прямоугольника;
- Формула Пика.

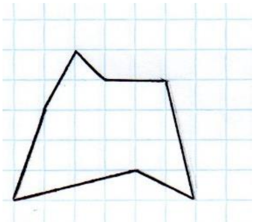


Рис.1

Найдём площадь многоугольника (рис. 1).

Искать её можно по-разному.

Это задание мы рассматривали на уроке. Хотя многоугольник выглядел достаточно просто, для вычисления его площади нам пришлось изрядно потрудиться. Мы потратили 10 минут времени на решение этой задачи. Хочу отметить, что не все учащиеся нашего класса справились с данным заданием. А когда нам сказали, что есть формула, позволяющая вычислить площадь за одну минуту, я решил заняться изучением этого вопроса.

Сначала я решил узнать: какими способами вычисляли площадь мои одноклассники, кто справился с заданием и заняться изучением формулы. В нашем классе никто не знал формулы Пика. Также это задание мы решили дать учащимся 9-го и 11-го классов. В таблице представлены результаты.

Таблица 1.

Класс	Правильно	Неправильно
9	16	2
10	21	7
11	19	2
всего	56	11

Способ / Класс	Подсчет клеток	Разбиение фигуры	Достроение фигуры до прямоугольника	Формула Пика
9	3	8	7	-
10	-	15	13	-
11	-	5	17	-
всего	3	24	42	-

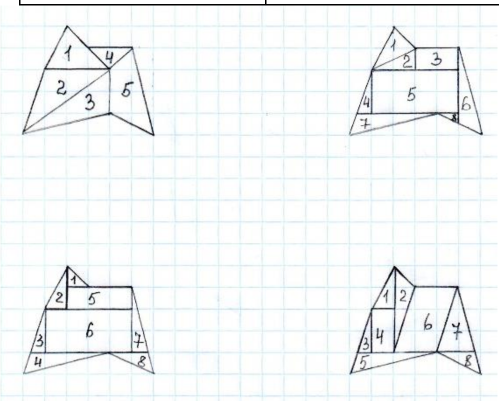


Рис.2

1 *способ:* Подсчет количества клеток (для данной фигуры приближенный).

2 *способ:* Попробовать разрезать многоугольник на достаточно простые фигуры (рис.2), найти их площади и сложить. Однако, это очень хлопотно!

3 *способ: В*ычислить площадь фигуры (рис.3), которая дополняет многоугольник до прямоугольника, и вычесть эту площадь из площади прямоугольника. Дополненная фигура (в отличие от исходного многоугольника) легко разбивается на прямоугольники и прямоугольные треугольники так, что её площадь вычисляется без усилий.

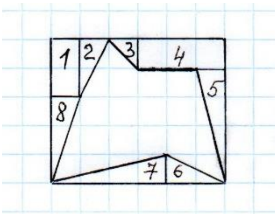


Рис.3

S = 2+1+0,5+3+2+1+2+1,5=13 (кв.ед.)

Следовательно, площадь исходного многоугольника равна

S = 5 · 6 – 13=17 (кв.ед.)

4 *способ:* Оказывается, площади многоугольников, вершины которых расположены в узлах сетки, можно вычислить гораздо проще: существует формула, связывающая площадь такого многоугольника с количеством узлов, лежащих внутри и на границе многоугольника.

По формуле Пика **S=В+Г:2–1**, где В количество узлов, лежащих внутри прямоугольника, а Г – количество узлов на его границе.

S = 14 + 8/2 – 1 = 17 (кв.ед.)

Задача: Вычислить площадь звезды (рис. 4)

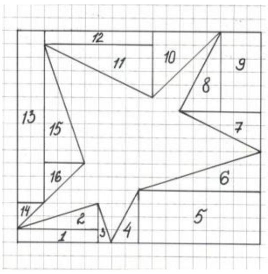


Рис.4

Решение:

1 способ:

Используя формулы для вычисления площади прямоугольника и площади треугольника, вычислю площади фигур 1-16.

$S_1 = 6$ кв.ед.; $S_2 = 6$ кв.ед.; $S_3 = 1{,}5$ кв.ед.; $S_4 = 4$ кв.ед.; $S_5 = 36$ кв.ед.;

S_6= 13,5 кв.ед.;S_7 = 9 кв.ед.; S_8 = 9 кв.ед.; S_9 = 18 кв.ед.; S_{10} = 12,5 кв.ед.; S_{11} = 16 кв.ед.; S_{12} = 8 кв.ед.; S_{13} = 26 кв.ед.; S_{14} = 2 кв.ед.; S_{15} = 13,5 кв.ед.; S_{16} = 4,5 кв.ед.

Площадь большого прямоугольника равнаS_1=16·18=288 кв. ед.

Найду сумму площадей $S_1 + S_2 + \ldots + S_{16}$ =185,5 кв.ед.

Следовательно, площадь многоугольника равна S=288-185,5=102,5 кв.ед.

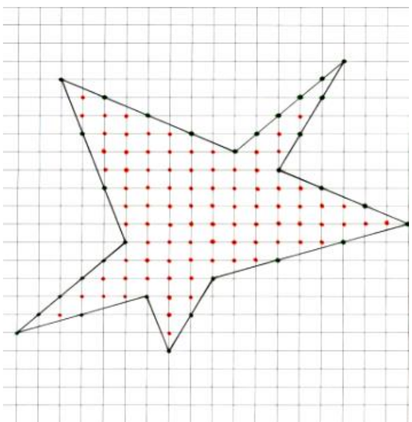


Рис.5

2 способ: С помощью формулы Пика

1. Сосчитаю количество внутренних узлов. В=88(красные точки рис. 5).
2. Сосчитаю граничные узлы. Г=31 (чёрные точки рис. 5).
3. Применяя формулу Пика.

S=88+31:2-1 = 88+15,5-1=102,5(кв.ед)

Ответ: 102,5 кв.ед.

3. Формула Пика

Многоугольник без самопересечений называется решётчатым, если все его вершины находятся в точках с целочисленными координатами (в декартовой системе координат).

Линии, идущие по сторонам клеток, образуют на нём сетку, а вершины клеток – узлы этой сетки.

Пусть дан некоторый решётчатый многоугольник, с нулевой площадью. Обозначим его площадь через S, количество точек с целочисленными координатами, лежащих строго внутри многоугольника – через В; количество точек с целочисленными координатами, лежащих на сторонах многоугольника – через Г.

Тогда справедлива формула **S=В+Г:2–1**, которую открыл и доказал австрийский математик Георг Александр Пик в 1899 году.

Я решил на конкретных примерах проверить формулу Пика ещё и для таких многоугольников (рис.6).

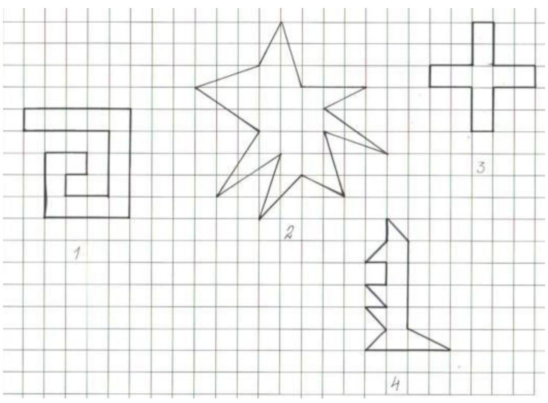


Рис.6

Решение:

1) S=0+32:2-1=15 кв.ед
2) S=18+17:2-1=25,5 кв.ед
3) S=0+20:2-1=9 кв.ед
4) S =0+19:2-1=8,5кв.ед

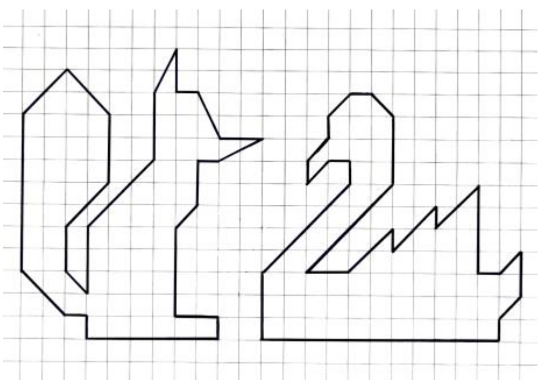


Рис.7

Вычислить площадь фигуры (рис.7)

Решение:

1) В = 44, Г = 57, S=44+57:2-1=71,5 кв.ед.

2) В = 40, Г = 54, S=40+54:2-1=66 кв.ед.

Ответ: 71,5 кв.ед.; 66 кв.ед.

4. Применение формулы Пика при выполнении заданий ОГЭ и ЕГЭ по математике

Все пособия по подготовке к ОГЭ и ЕГЭ, диагностические работы, а также демонстрационные варианты, содержат задания на вычисление площадей фигур, изображенных на клетчатой бумаге. Большинство таких заданий можно быстро выполнить, применив лишь формулы для вычисления площадей треугольника, прямоугольника, квадрата и трапеции. В этих задачах указан масштаб- размер одной клетки равен 1 см, соответственно, площадь одной клетки равна 1 $см^2$. Поэтому требование дать ответ в квадратных сантиметрах равносильно требованию дать ответ в клеточках. Вопрос только в том, насколько эффективно мы сможем распорядиться своим экзаменационным временем.

Способ 1

Например, для треугольника, параллелограмма или трапеции во многих случаях достаточно провести мысленно высоту к одной из сторон.

Выбирать в качестве стороны и высоты нужно те отрезки, длины которых выражаются целым числом делений сетки.

Задание В3 (№ 27556)

Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис.8). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

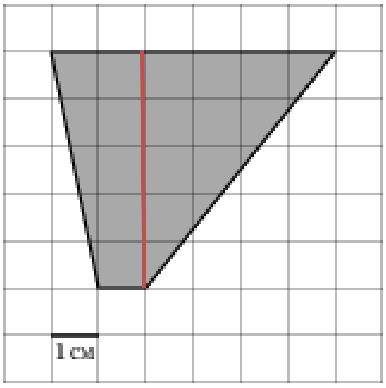


Рис.8

Решение:

$S=\frac{1+6}{2}\cdot 5 = 17{,}5(см^2)$

Ответ: $17{,}5\ см^2$

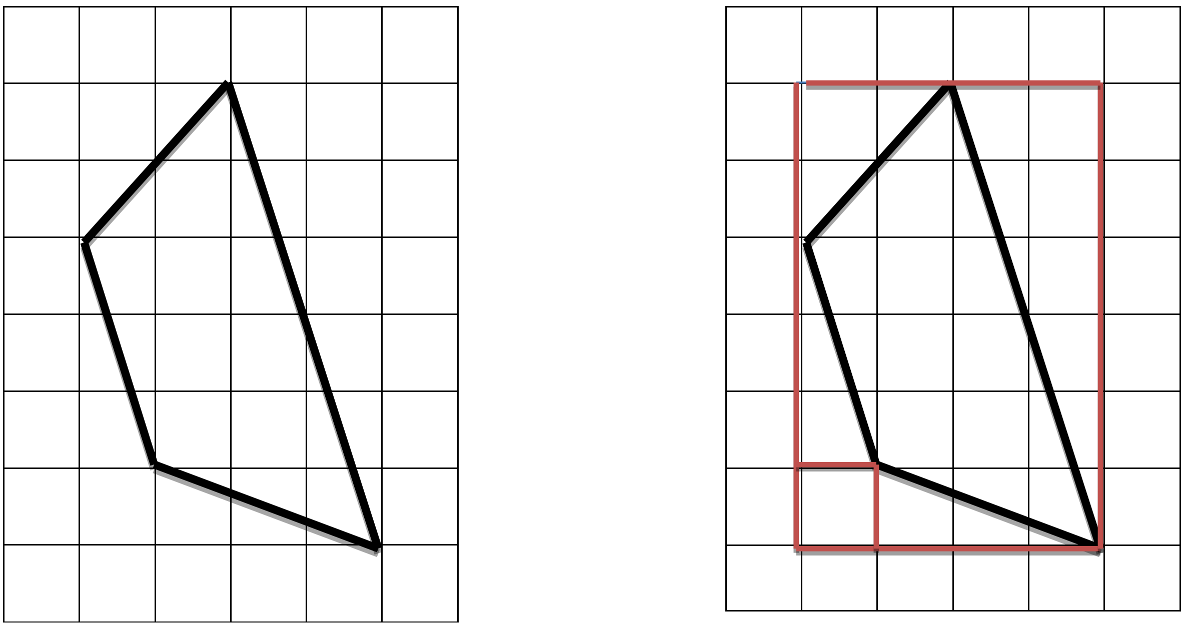
В некоторых случаях для вычисления недостающих элементов следует использовать теорему Пифагора.

Способ 2

Ряд задач можно решить, разбив фигуру на части, вычисление площадей которых не представляет труда, или, заметив, что фигура сама является частью другой фигуры, а площадь последней можно найти почти сразу.

Прототип задания B3 (№ 254009)

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис.9,а). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



а) б)

Рис.9

<u>Решение:</u>

Достроим фигуру до прямоугольника и выделим квадрат и прямоугольные треугольники.

$S_1=24(см^2)$

$S_2=1+1,5+1,5+2+6=12(см^2)$

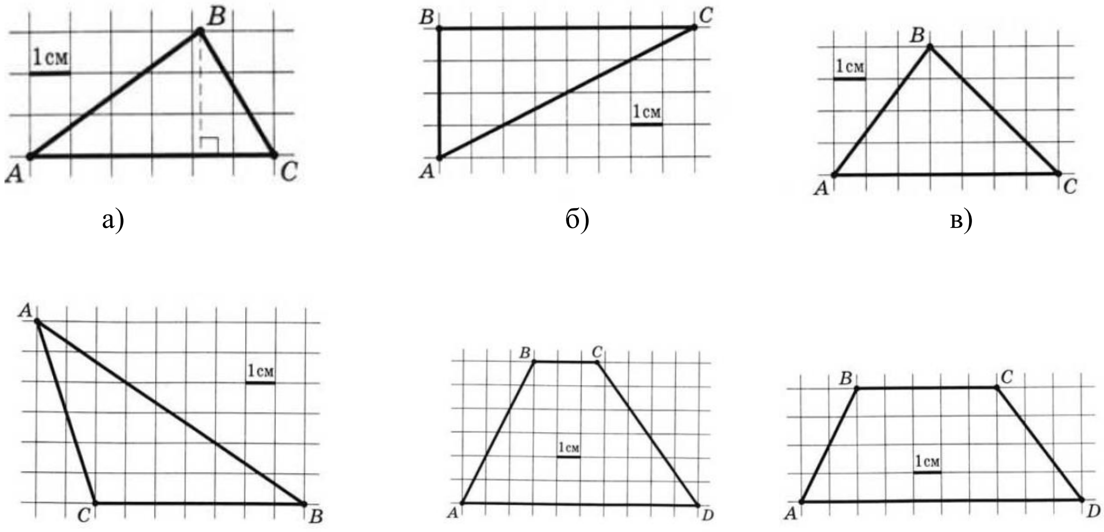
$S=24-12=12(см^2)$

Ответ: 12 $см^2$

И *третий способ* – использование формулы Пика. Когда я первый раз столкнулся с этой формулой, мне показалось, что легче этого ну разве что таблица умножения.

Примеры:

На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (трапеция) (рис.10). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах:



а) б) в)

г) д) е)

Рис. 10

Но в некоторых вариантах применение формул площадей фигур приводит к более объемному решению, чем использование формулы Пика. S = В+Г:2–1, где В – количество улов внутри фигуры, Г – количество узлов на границе фигуры. Это типовые фигуры, в заданиях стоит вопрос о нахождении их площади. Такие или подобные им будут на ОГЭ и ЕГЭ. При помощи формулы Пика такие задачи решаются за минуту.

Примеры решения задач:

Задача 1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1см × 1см изображен треугольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

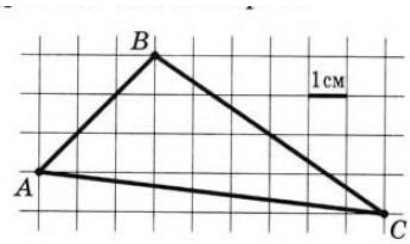


Рис. 11

1 способ

Из площади прямоугольника вычтем сумму площадей трех треугольников:

$$4\cdot 9-(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 9)=15(см^2).$$

2 способ

Применяем формулу Пика: S = В + Г : 2 – 1, где В – количество узлов внутри фигуры, Г – количество узлов на сторонах фигуры.

В=13, Г=6, S = 13 + 6 : 2 – 1 = 15(см^2)

Ответ: 15 см^2

Задача 2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1см × 1см изображен прямоугольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

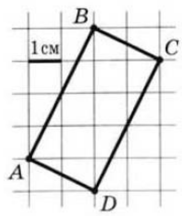


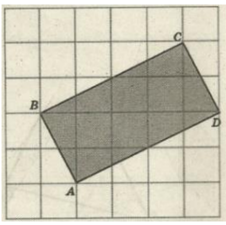
Рис. 12

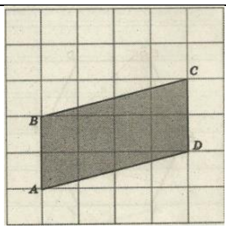
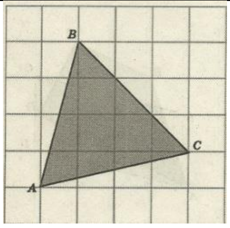
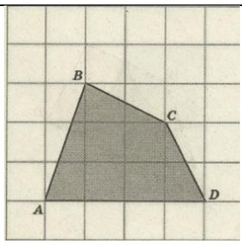
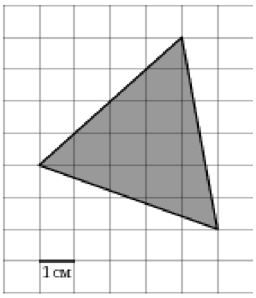
В=8, Г=6, S = 8 + 6 : 2 – 1 = 10(см^2)

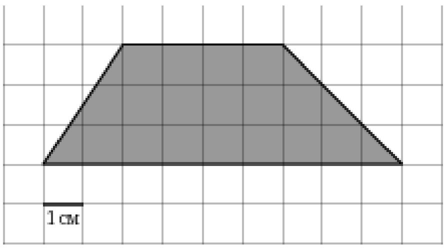
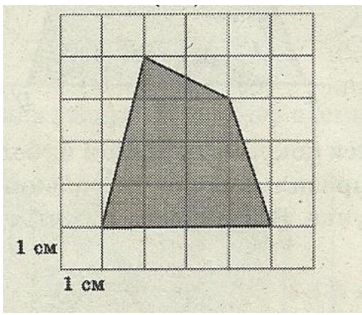
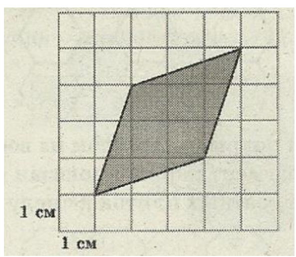
Ответ: 10 см^2

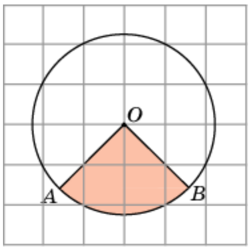
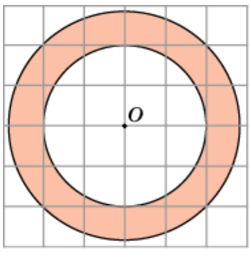
Задача 3. Найдите площадь фигур, изображенных на клетчатой бумаге с размером клетки 1см × 1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Таблица 2.

Рисунок	По формуле геометрии	По формуле Пика
Задача №1 	$S=S_{пр}-(2S_1+2S_2)$ $S_{пр}=4*5=20$ см^2 $S_1=(2*1)/2=1$см^2 $S_2=(2*4)/2=4$см^2 $S=20-(2*1+2*4)=10$ см^2	В = 8, Г = 6 S = 8 + 6/2 – 1 = 10 (см^2) Ответ: 10 см^2.

	Ответ:10 см².	
Задача №2 	a=2, h=4 $S=a*h=2*4=8$ см^2 Ответ: 8 см².	В = 6, Г = 6 S = 6 + 6/2 – 1 = 8 (см²) Ответ: 8 см².
Задача №3 	$S=S_{кв}-(S_1+2S_2)$ $S_{кв}=4^2=16$ см^2 $S_1=(3*3)/2=4{,}5$см^2 $S_2=(1*4)/2=2$см^2 $S=16-(4{,}5+2*2)=7.5$ см^2	В = 6, Г = 5 S = 6 + 5/2 – 1 = 7,5 (см²) Ответ: 7,5 см².
Задача №4 	$S=S_{пр}-(S_1+S_{2+}\ S_3)$ $S_{пр}=4^*3=12$ см^2 $S_1=(3*1)/2=1{,}5$см^2 $S_2=(1*2)/2=1$см^2 $S_3=(1+3)*1/2=2$см^2 $S=12-(1{,}5+1+2)=7.5$ см^2	В = 5, Г = 7 S = 5 + 7/2 – 1 = 7,5 (см²) Ответ: 7,5 см².
Задача №5. 	$S=S_{пр}-(S_1+S_{2+}\ S_3)$ $S_{пр}=6^*5=30$ см^2 $S_1=(2*5)/2=5$см^2 $S_2=(1*6)/2=3$см^2 $S_3=(4*4)/2=8$см^2 $S=30-(5+3+8)=14$см^2 Ответ: 14 см²	В = 12, Г = 6 S = 12 + 6/2 – 1 = 14 (см²) Ответ: 14 см²

 ***Задача* №6.**	$S_{тр}$=(4+9)/2*3=19,5 см^2 Ответ: 19,5 см^2	В = 12, Г = 17 S = 12 + 17/2 – 1 = 19,5 (см²) Ответ: 19,5 см^2
***Задача* №7.** Найдите площадь лесного массива  (в м²), изображённого на плане с квадратной сеткой 1 × 1(см) в масштабе 1 см – 200 м	S= S_1+S_{2+} S_3 S_1=(800*200)/2=80000м^2 S_2=(200*600)/2=60000м^2 S_3=(800+600)/2*400= =280000м^2 S=80000+60000+240000= =420000м^2 Ответ: 420 000 м²	В = 8, Г = 7. S_1 = 8 + 7/2 – 1 = 10,5 (см²) 1 см² - 200² м²; S = 40000 · 10,5 = 420 000 (м²) Ответ: 420 000 м²
Задача №8. Найдите площадь поля (в м²), изображённого на плане с квадратной сеткой 1 × 1(см) в масштабе 1 см – 200 м. 	S=$S_{кв}$-2($S_{тр}$+$S_{трап}$) $S_{кв}$=800*800=640000 м^2 $S_{тр}$=(200*600)/2=60000м^2 $S_{трап}$=(200+800)/2*200= =100000м^2 S=640000- 2(60000+10000)= 320000 м^2 Ответ: 320 000 м²	*Решение.* Найдём S_1 площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге по формуле Пика: S = В + $\frac{Г}{2}$ - 1 В = 7, Г = 4. S_1 = 7 + 4/2 – 1 = 8 (см²) 1 см² - 200² м²; S = 40000 · 8 = 320 000 (м²)

		Ответ: 320 000 $м^2$
Задача №9. Найдите площадь S сектора, считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.  	Сектор является одной четвертой частью круга и, следовательно, его площадь равна одной четвертой площади круга. Площадь круга равна πR^2, где R– радиус круга. В нашем случае $R = \sqrt{5}$ и, следовательно, площадь S сектора равна $5\pi/4$. Откуда $S/\pi=1,25$. Ответ. 1,25.	Г= 5, В= 2, S = В + Г/2 – 1= 2 + 5/2 – 1= 3,5, $\frac{S}{\pi} \approx 1,11$ Ответ. 1,11.
Задача №10. Найдите площадь S кольца, считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.  	Площадь кольца равна разности площадей внешнего и внутреннего кругов. Радиус R внешнего круга равен $2\sqrt{2}$, радиус rвнутреннего круга равен 2. Следовательно, площадь кольца равна 4π и, следовательно, $\frac{S}{\pi} = 4$. Ответ:4.	Г= 8, В= 8, S = В + Г/2 – 1= 8 + 8/2 – 1=11, $\frac{S}{\pi} \approx 3,5$ Ответ:3,5

Заключение

Проанализировав математическую литературу и разобрав большое количество примеров по теме исследования, был сделан вывод, что выбор метода вычисления площади фигуры на клетчатой бумаге зависит от формы фигуры. Если фигура представляет собой треугольник, прямоугольник, параллелограмм или трапецию, то удобно воспользоваться всем известными формулами для вычисления площадей. Если фигура представляет собой выпуклый многоугольник, то возможно использовать как метод разбиения, так и дополнения (в большинстве случаях удобнее — метод дополнения). Если фигура представляет собой невыпуклый или звездчатый многоугольник, то удобнее применить формулу Пика. Поскольку формула Пика является универсальной формулой для вычисления площадей (если вершины многоугольника находятся в узлах решетки), то ее можно использовать для любой фигуры. Однако, если многоугольник занимает достаточно большую площадь (или клетки мелкие), то велика вероятность допустить ошибку в подсчетах узлов решетки. Следовательно, при решении подобных задач в ОГЭ и ЕГЭ лучше воспользоваться традиционными методами (разбиения или дополнения), а результат проверить по формуле Пика.

Некоторые задачи в работе решены несколькими способами. Я познакомил своих одноклассников с формулой Пика и провел небольшую самостоятельную работу. Ребятам предлагалось вычислить площадь многоугольника, применяя названную формулу. По итогам этой работы можно сделать вывод, что на вычисление площади невыпуклого многоугольника с помощью формулы Пика было затрачено меньше времени, и не было допущено ошибок. Моей работой заинтересовались учащиеся 11 класса, ведь площадь фигур гораздо проще находить при помощи данной формулы. Не составляет огромных усилий посчитать узлы внутри и на границе, а потом подставить в формулу. Можно и не знать теорем и правил из геометрии.

В ходе исследования я пришел к следующим выводам:

1. Для вычисления площади многоугольника, нужно знать всего одну формулу: **S = В + Г:2 - 1** – формулу Пика.
2. Формула Пика проста для запоминания.
3. Формула Пика удобна и проста в применении.
4. Многоугольник, площадь которого необходимо вычислить, может быть любой формы.

Формула Пика облегчает и ускоряет нахождение площади многоугольников. Но и она имеет свои недостатки:

1. Чертёж должен быть очень четким (для подсчета узлов);
2. Формула применяется лишь в том случае, если многоугольник изображен на клетчатой бумаге;
3. Формула не имеет аналогов в пространстве.

Способы вычисления площадей многоугольников, в том числе с помощью формулы Пика позволяет успешному изучению геометрии в старших классах. Таким образом, я считаю, что выдвинутая гипотеза доказана. Данная работа может быть полезна для учащихся при подготовке к итоговой аттестации.

Эта работа способствовала более глубокому пониманию школьной программы и расширению кругозора.

Список литературы и интернет-ресурсов

1. ВавиловВ.В., УстиновА.В. Две знаменитые формулы. Журнал «Квант». — 2008. — № 2.
2. ВавиловВ.В., УстиновА.В. Многоугольники на решетках. – М.: МЦНМО, 2006.
3. Васильев Н. Б. Вокруг формулы Пика / Н. Б. Васильев // Квант. — 1974. — №12. — С. 39—43.
4. Газета Математика —2009. — № 23.
5. Жарковская Н. М., Рисс Е. А. Геометрия клетчатой бумаги. Формула Пика // Математика, 2009, № 17.– [Электронный ресурс] – URL: http://mat.1september.ru/2009/23/gazeta_23_09.pdf (дата обращения 12.01.2017г.)
6. Кушниренко А. Г. Целые точки в многоугольниках и многогранниках / А. Г. Кушниренко // Квант. — 1977. — № 4. — С. 13—20.
7. Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л.И. Математика. ЕГЭ 2015. Книга II. Профильный уровень. – М.: Народное образование, 2015.
8. Многоугольники на клетчатой бумаге / В. Гальперин, В. Калинников // Квант. — 1978. — № 6. — С. 38—41.
9. Открытый банк задач ОГЭ и ЕГЭ по математике 2016-2017.
10. ПрасоловВ. В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001.
11. Решетки и правильные многоугольники / А. А. Егоров // Квант. — 1974. — № 12. — С. 26—33.
12. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрические задачи с практическим содержанием. – М.: Чистые пруды, 2010.
13. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия на клетчатой бумаге. – М.: Чистые пруды, 2009.
14. ФИПИ. Открытый банк заданий ЕГЭ 2015 по математике.– [Электронный ресурс] – URL: http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (дата обращения 01.12.2016г.)