Научно-исследовательская работа

Предмет

Математика

НЕТРАДИЦИОННЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Выполнил:

Захаров Егор Андреевич

учащийся 10 «А» класса

МБОУ «Лицей №9 им. К. Э. Циолковского», Россия, г. Калуга

Рылова Ирина Георгиевна

научный руководитель,

МБОУ «Лицей №9 им. К. Э. Циолковского», Россия, г. Калуга

ВВЕДЕНИЕ

В древности тригонометрия возникла в связи с потребностями астрономии, землемерия и строительного дела, то есть носила чисто геометрический характер и представляла главным образом «исчисление хорд». Со временем в нее начали вкрапляться некоторые аналитические моменты. В первой половине 18-го века произошел резкий перелом, после чего тригонометрия приняла новое направление и сместилась в сторону математического анализа. Именно в это время тригонометрические зависимости стали рассматриваться как функции.

Тригонометрические уравнения одна из самых сложных тем в школьном курсе математики. Тригонометрические уравнения возникают при решении задач по планиметрии, стереометрии, астрономии, физики и в других областях обучения. Тригонометрические уравнения и неравенства из года в год встречаются среди заданий централизованного тестирования.

Самое важное отличие тригонометрических уравнений от алгебраических состоит в том, что в алгебраических уравнениях конечное число корней, а в тригонометрических - бесконечное, что сильно усложняет отбор корней. Еще одной спецификой тригонометрических уравнений является наличие не единственного способа формы записи ответа.

Цель исследований: изучить различные способы решения тригонометрических уравнений и неравенств и отобрать самые рациональные из них для практического применения.

Задачи исследования:

- Изучить найденную литературу по данному вопросу.
- Рассмотреть особенности каждого найденного способа.
- Определить закономерности в решении тригонометрических уравнений и неравенств.
- Выяснить, какой из рассмотренных способов решения тригонометрических уравнений и неравенств является универсальным, и какой является рациональным.
- Показать практическое применение полученных знаний и оценить степень сложности в использовании различных способов.
- Распространить опыт решения тригонометрических уравнений и неравенств среди учащихся 8-11 классов.

Гипотеза: при изучении различных способов решения тригонометрических уравнений и неравенств смогу ли я найти такие, которые помогут не прибегать к традиционному решению по формулам, а найти корни рациональнее и быстрее.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Элементарные тригонометрические уравнения - это уравнения вида $f(kx+b)=a$, где $f(x)$ - одна из тригонометрических функций: $\sin x$, $\cos x$, x.
Элементарные тригонометрические уравнения имеют бесконечно много корней. Например, уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ удовлетворяют следующие значения: $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{6}+2\pi$, $x=\frac{\pi}{6}-2\pi$ и т. д. Общая формула по которой находятся все корни уравнения $\sin x = a$, где $|a|\le 1$, такова:

$$x=(-1)^n \arcsin a+\pi n$$

Здесь n может принимать любые целые значения, каждому из них соответствует определенный корень уравнения; в этой формуле (равно как и в других формулах, по которым решаются элементарные тригонометрические уравнения) n называют *параметром*. Записывают обычно $n \in Z$, подчеркивая тем самым, что параметр n принимать любые целые значения.
Решения уравнения $\cos x = a$, где $|a| \le 1$, находятся по формуле

$$x=\pm \arccos a+2\pi n, n\in Z$$

Особо отметим некоторые частные случаи элементарных тригонометрических уравнений, когда решение может быть записано без применения общих формул:

$$\sin x=0, x=\pi k, k\in Z$$

$$\sin x=1, x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$$

$$\sin x=-1, x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$$

$$\cos x=0, x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$

$$\cos x=1, x=2\pi k, k\in Z$$

$$\cos x=-1, x=\pi+\pi k, k\in Z$$

При решении тригонометрических уравнений важную роль играет период тригонометрических функций. Поэтому приведем две полезные теоремы:

Теорема. *Если* T *- основной период функции* $f(x)$*, то число* $\frac{T}{k}$ *является основным периодом функции* $f(kx+b)$.

Периоды функций T_1 и T_2 называются соизмеримыми, если существуют натуральные числа m и n, что $mT_1 = nT_2 = T$.

Теорема. *Если периодические функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$*, имеют соизмеримые* T_1 *и* T_2*, то они имеют общий период* $mT_1 = nT_2 = T$*, который является периодом функций* $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x) * f_2(x)$.

В теореме говорится о том, что T является периодом функции $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x) * f_2(x)$, и не обязательно является основным периодом. Например, основной период функций $\cos x$ и $\sin x$ - 2π, а основной период их произведения π.

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

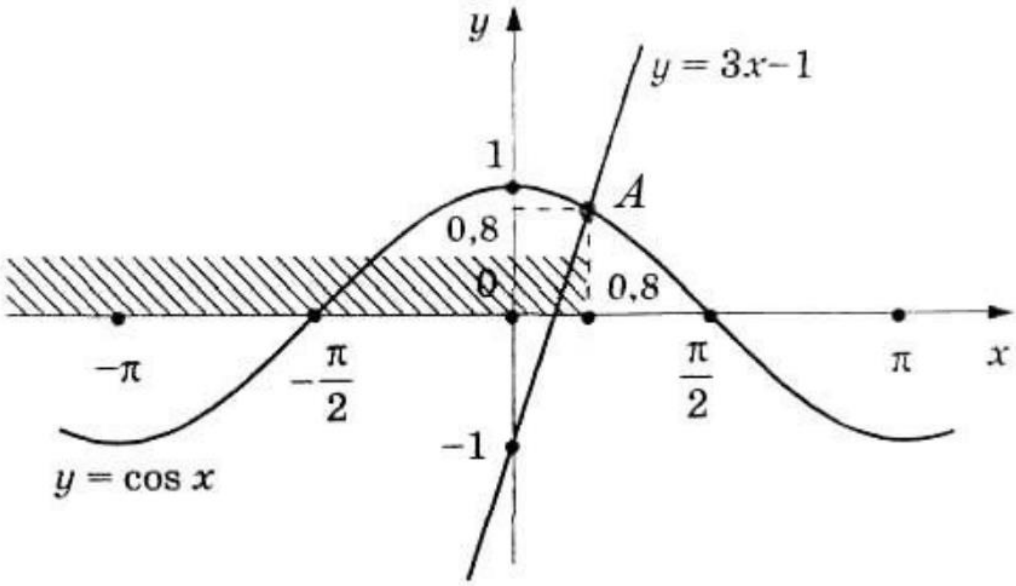
I. Графический метод решения тригонометрических неравенств

На практике довольно часто оказывается полезным графический метод решения неравенств. Рассмотрим сущность метода на конкретных примере.

Пример. Решить неравенство: $\cos x - 3x + 1 \geq 0$.

Решение: При решении неравенств графическим методом необходимо как можно более точно построить графики функций. Преобразуем данное неравенство к виду: $\cos x \geq 3x - 1$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и y=3x-



1.(рис. 1)

рис. 1

Графики функций пересекаются в точке A с координатами x ≈ 0,6 ; y ≈ 0,8 . На промежутке (–∞; 0,6) точки графика $y = 3x - 1$ ниже точек графика $y = cosx$. А при x ≈ 0,6 значения функций совпадают. Поэтому $\cos x - 3x + 1 \geq 0$ при x ≤ 0,6.

Ответ: x∈ (–∞; 0,6].

II. Метод подстановки

Довольно часто исходное тригонометрическое неравенство путем удачно выбранной подстановки удается свести к алгебраическому (рациональному или иррациональному) неравенству. Рассмотрим на конкретных примере применение этого метода.

Пример. Решить неравенство: $2sin^2x - \sin x + \sin 3x < 1$.

Решение: Так как $\sin 3x = 3\sin x - 4sin^3 x$, то это неравенство эквивалентно следующему:

$$-4sin^3x + 2sin^2x = 2\sin x < 0.$$

Произведем замену переменной: $\sin x = t, |t| \leq 1$.

Получим: $4t^3 - 2t^2 - 2t + 1 > 0 \Leftrightarrow 2t^2(2t-1) - (2t-1) > 0 \Leftrightarrow (2t-1)(2t^2-1) > 0 \Leftrightarrow (2t-1)(\sqrt{2}t-1)(\sqrt{2}t+1) > 0$.

Решим это неравенство методом интервалов.(рис. 2)

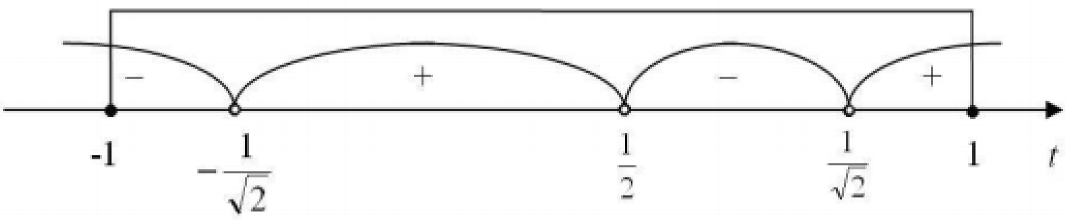


рис. 2

Получим: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} < t \leq 1$.

Следовательно, для отыскания x получаем совокупность неравенств:

$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \dfrac{1}{2} \\ \sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Решим графически(рис. 3)

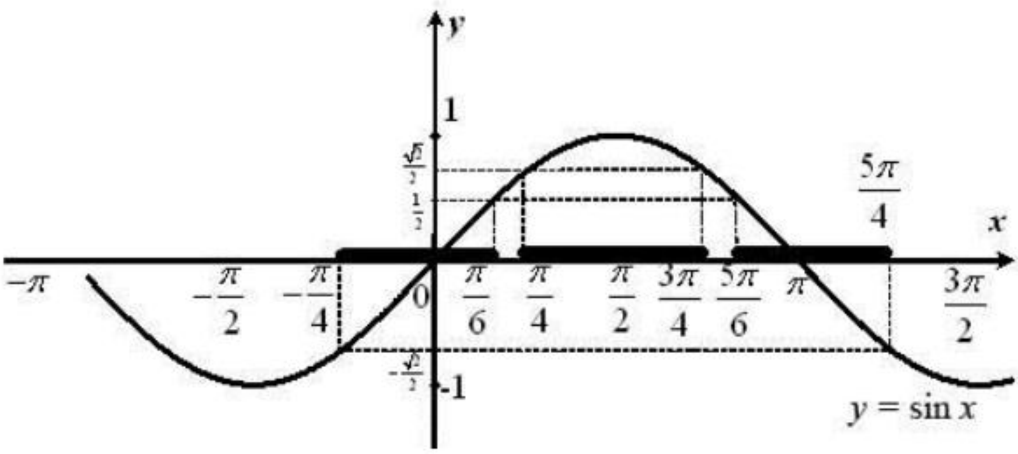


рис. 3

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in Z$

III. Метод концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенств

Данный метод является аналогом метода параллельных числовых осей при решении систем рациональных неравенств.

Пример. Решить систему тригонометрических неравенств:

$$\begin{cases} \sin 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x < -\dfrac{1}{2} \\ \tan x \geq -1 \end{cases}$$

Решение: Сначала решим каждое неравенство отдельно(рис. 4)

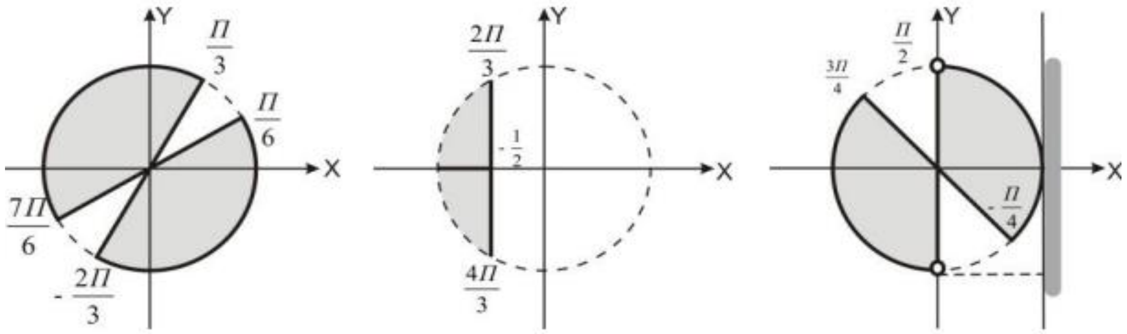


рис. 4

Далее строим систему концентрических окружностей для аргумента x. Рисуем окружность и заштриховываем ее согласно решению первого неравенства, затем рисуем окружность большего радиуса и заштриховываем ее согласно решению второго, далее строим окружность для третьего неравенства и базовую окружность. Из центра системы через концы дуг проводим лучи так, чтобы они пересекали все окружности. На базовой окружности формируем решение(рис. 5)

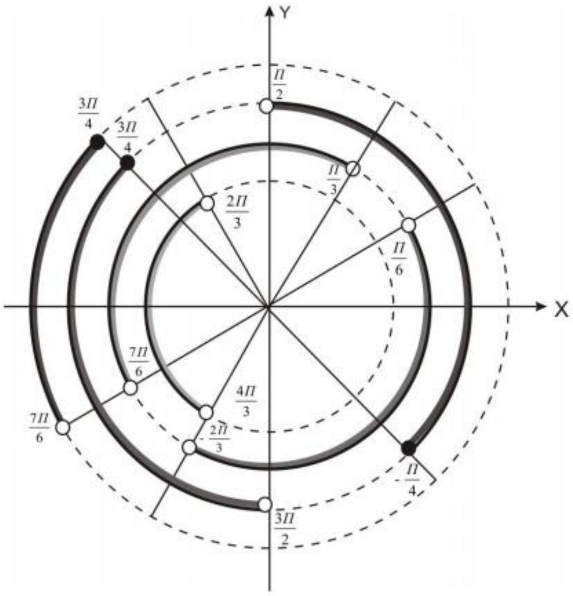


рис.5

Ответ: $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right], k \in Z$

IV. Метод секторов для решения тригонометрических неравенств

Рассмотрим метод секторов для решения тригонометрических неравенств. Решение неравенств вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ $(< 0, \geq 0, \leq 0)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – рациональные тригонометрические функции (синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы входят в них рационально), аналогично решению рациональных неравенств. Рациональные неравенства удобно решать методом интервалов на числовой оси. Его аналогом при решении рациональных тригонометрических неравенств является метод секторов в тригонометрическом круге, для sin x и cos x (T = 2π) или тригонометрическом полукруге для tg x и ctg x (T =π).

1.Неравенства вида $\frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} > 0$ $(< 0, \geq 0, \leq 0)$.

В методе интервалов каждому линейному множителю числителя и знаменателя вида$(x - x_0)$ на числовой оси соответствует точка x_0, и при переходе через эту точку $(x - x_0)$ меняет знак. В методе секторов каждому множителю вида$(f(x) - a)$, где $f(x)$ – одна из функций $\sin x$ или $\cos x$ и $-1 < a < 1$, в тригонометрическом круге соответствуют два угла x_1 и x_2 $(f(x_1 = f(x_2) = a)$, которые делят круг на два сектора. При переходе через x_1 и x_2 функция $(f(x) - a)$меняет знак.

Необходимо помнить следующее:

а) Множители вида $(\sin x - a)$ и $(\cos x - a)$, где $|a| > 1$, сохраняют знак для всех значений x. Такие множители числителя и знаменателя отбрасывают, изменяя (если а >1) при каждом таком отбрасывании знак неравенства на противоположный.

б) Множители вида $(\sin x \ \pm 1)$ и $(\cos x \ \pm 1)$ также отбрасываются. При этом, если это множители знаменателя, то в эквивалентную систему неравенств добавляются неравенства вида $\sin x \neq \pm 1$ и $\cos x \neq \pm 1$. Если это множители числителя, то в эквивалентной системе ограничений им соответствуют неравенства $\sin x \neq \pm 1$ и $\cos x \neq \pm 1$ в случае строгого исходного неравенства, и равенства $\sin x \neq \pm 1$ и $\cos x \neq \pm 1$ в случае нестрогого исходного неравенства. При отбрасывании множителя $(\sin x - 1)$ или $(\cos x - 1)$ знак неравенства изменяется на противоположный.

Пример. Решить неравенства: а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\sin x < \frac{1}{2}$.

Решение: В тригонометрическом круге уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ соответствуют два угла $x_1 = \frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Они делят круг на два сектора, в каждом из которых функция $y = \sin x - \frac{1}{2}$ сохраняет знак. (рис. 6)

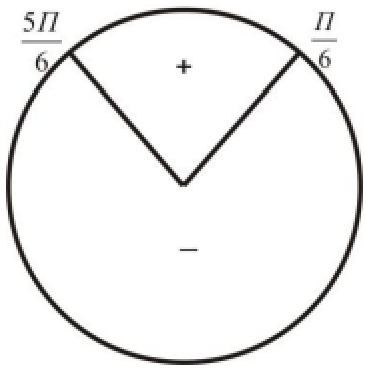


рис. 6

В секторе $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ имеем $\sin x - \frac{1}{2} > 0$. В секторе $\frac{5\pi}{6} - 2\pi < x < \frac{\pi}{6}$, очевидно, $\sin x - \frac{1}{2} < 0$. Период функции $y = \sin x \ T = 2\pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

2. Неравенства вида $\frac{P(\tan x, \cot x)}{Q(\tan x, \cot x)} > 0$ $(< 0, \leq 0, \geq 0)$.

Каждому множителю вида $(f(x) - a)$, где$f(x)$ одна из функций tg x или ctg x , в тригонометрическом полукруге $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (или $0 < x < \pi$) соответствует один угол x_0 такой, что $f(x_0) = a$. При переходе через x_0 функция (f(x)-a) меняет знак. Кроме того, ctg x не определен при $x = \pm\frac{\pi}{2}$, и слева, и справа от этих точек имеет разные знаки. Аналогично, ctg x не определен при x = 0 и x =π , и слева, и справа от этих точек имеет разные знаки.

Пример. Решить неравенства а) $\tan x > 1$; б) $\cot x \leq 1$.

Решение: В тригонометрическом полукруге $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ уравнению $\tan x = 1$ соответствует один угол $x_0 = \frac{\pi}{4}$. При $x = \pm\frac{\pi}{2}$ функция $y = \tan x$ не определена. Указанные три угла делят полукруг на два сектора, в каждом из которых функция $y = \tan x - 1$ сохраняет знак.(рис. 7)

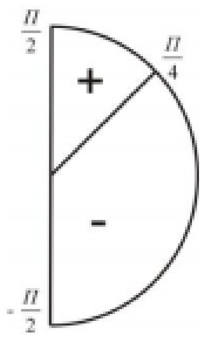


рис.7

В секторе $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ имеем $\tan x - 1 > 0$.

В секторе$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$, очевидно, $\tan x - 1 < 0$.

Функция y = tg x имеет период T =π .

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

V. Метод интервалов на тригонометрической окружности

Рассмотрим денный способ на конкретном примере:

Решить неравенство $\cos 3x + \cos x > 0$.

Решение. Приведем неравенство к виду $2\cos 2x * \cos x > 0$. Далее будем работать с уравнением $2\cos 2x * \cos x = 0$. Оно равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right.$$

Решим данные уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z\\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\end{array}\right.$$

Будем отмечать на тригонометрическом круге корни первого уравнения (Δ), а корни второго (*). Получим:(рис. 8)

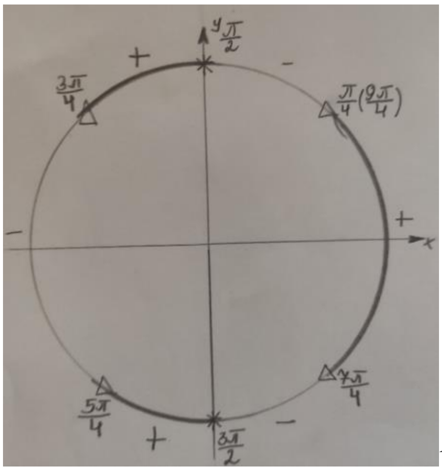


рис. 8

Теперь на круге видно несколько промежутков. Подставим в исходное уравнение корни из этих промежутков и узнаем какой знак имеет каждый из них. Получим решение уравнения.

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{9\pi}{4} + 2\pi n\right)$.

Результаты и обсуждение

Для того что бы сравнить пригодность и выявить плюсы и минусы различных методов решения тригонометрических неравенств, я решил одно тригонометрическое неравенство всеми доступными для него способами. Это неравенство: $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

1 способ (Графический метод)

Представим данное неравенство в виде двух функций: $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, и начертим их графики (рис. 9).

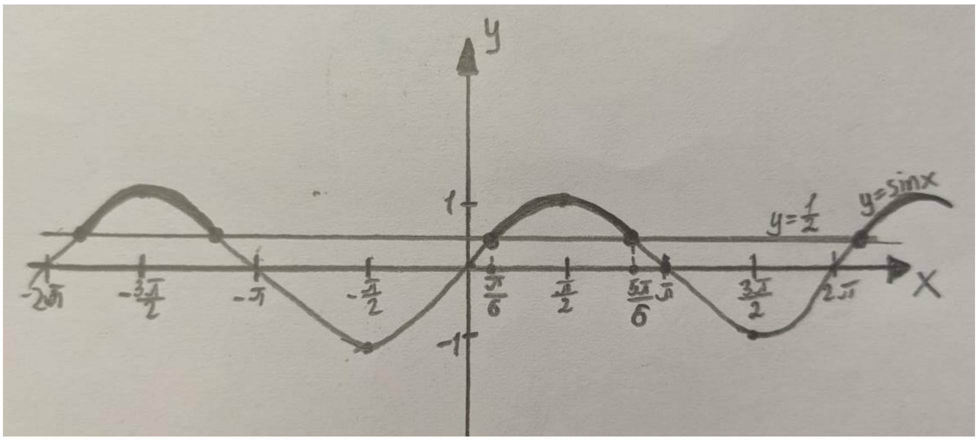


Рис. 9

Как видно из рисунка, графики пересекаются в точках $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Период функции равен 2π, следовательно $\sin x \geq \frac{1}{2}$ при $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$.

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

2 способ (Метод секторов)

Определим точки в которых функция $\sin x$ равна $\frac{1}{2}$. Это точки $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Отметим их на тригонометрической окружности (рис. 10):

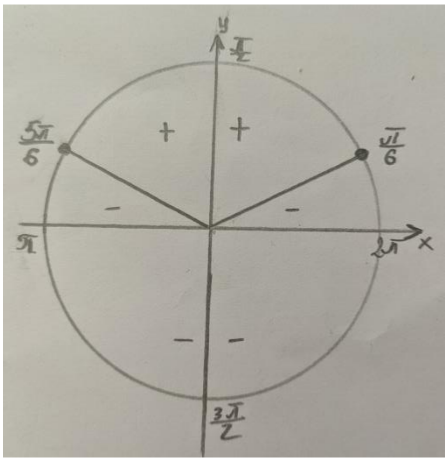


Рис. 10

Далее проверим в каких секторах неравенство больше $\frac{1}{2}$, а в каких меньше. В ответ запишем, те корни, когда $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

3 способ (Метод интервалов)

Отметим на тригонометрической окружности корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ (рис. 11):

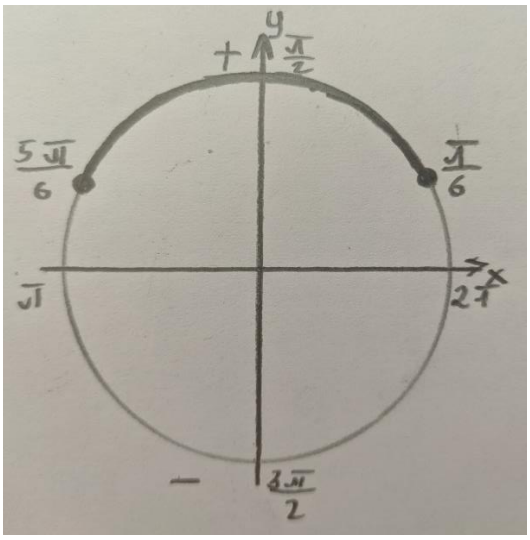


Рис. 11

Далее проверим в каких интервалах неравенство больше $\frac{1}{2}$, а в каких меньше. В ответ запишем, те корни, когда $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Название способа	+	-
Графический метод решения тригонометрических неравенств	Изучается в школе	Неточный, требует сложных построений
Метод подстановки	Прост в понимании	Работает не всегда
Метод концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенств	Помогает быстро решать системы тригонометрических неравенств	Не подходит для решения одиночных неравенств
Метод секторов для решения тригонометрических неравенств	Позволяет точно определить ответ	Подходит не для всех уравнений
Метод интервалов на тригонометрической окружности	Является универсальным	Требует знания тригонометрических формул

Таблица 1

В ходе выполнения данной исследовательской работы мне удалось обобщить и систематизировать изученный материал по выбранной теме (Таблица 1), изучить различные способы решения тригонометрических уравнений и неравенств, научиться тригонометрические уравнения и неравенства уравнения 5 способами, помимо тех, которые изучаются в школе. Нужно отметить, что не все они удобны для решения, но каждый из них по-своему интересен. С моей точки зрения, наиболее рациональным для использования будет метод интервалов на тригонометрической окружности.

Я провел исследование на тему моей работы. Сначала я предложил своим одноклассникам решить различные тригонометрические уравнения, которые решаются разными способами. Вот результаты которые они показали(Диаграмма 1):

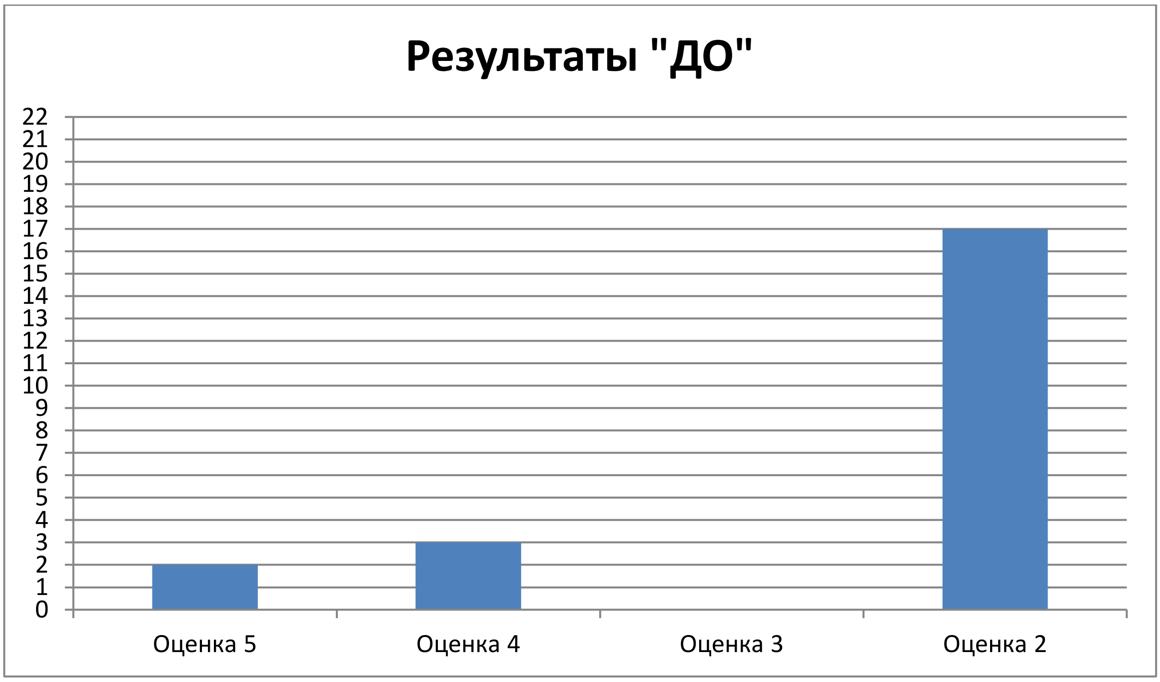


Диаграмма 1

После того, как я объяснил одноклассникам различные способы решения тригонометрических неравенств, то они снова написали эту же работу. Результаты повторной работы представлены в диаграмме 2:

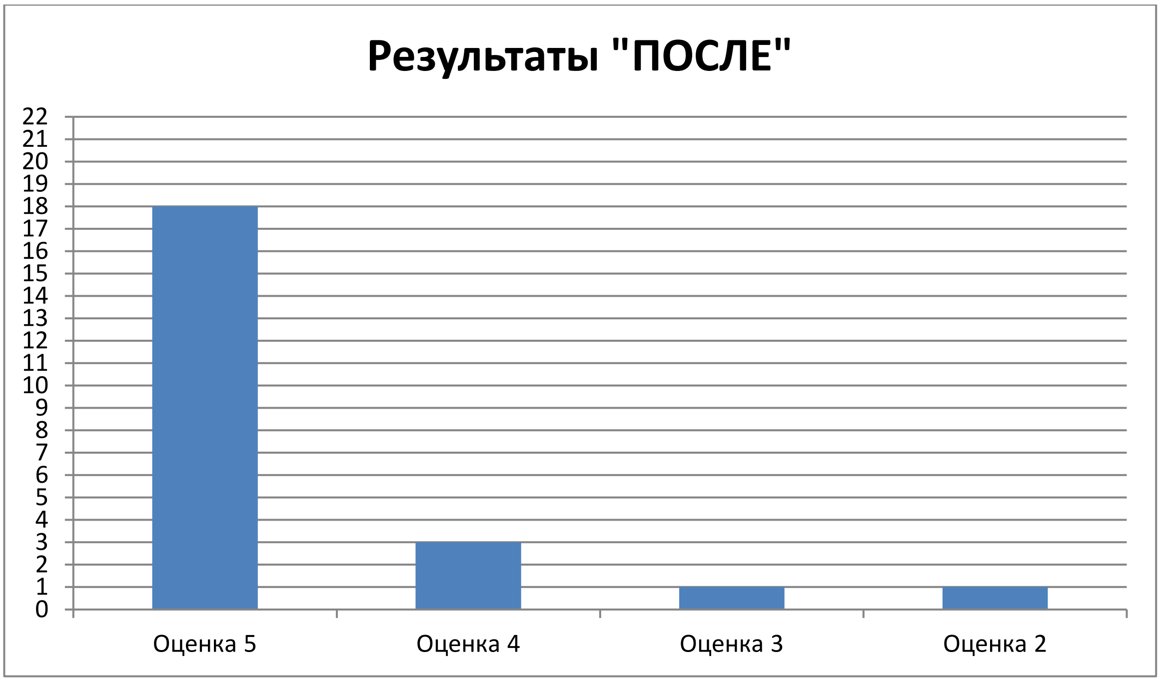


Диаграмма 2

Подводя итоги, можно сделать вывод: так как тригонометрические уравнения и неравенства играют огромную роль в математике, найденные и освоенные новые знания могут пригодиться не только в школе и в ВУЗе, но и на протяжении всей жизни. Также, можно понять, что в современных учебниках по алгебре мало внимания уделяется различным способам решения тригонометрических уравнений и неравенств, что не является положительным моментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. Алгебра и начала анализа. Учеб. для учащихся 10-11 кл. сред. шк. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 1994.

2. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства / М.И. Башмаков – М.: Наука, 1976.

3. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман – М.: Мир, 1965.

4. Блох А.Ш., Трухан Т.Л. Неравенства / А.Ш. Блох, Т.Л. Трухан – Минск: Народная Асвета, 1972.

5. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. Задачи по элементарной математике / Е.Б. Ваховский Е.Б., А.А. Рывкин – М.: Наука, 1971.

6. Виленкин Н.Я., Гутер Р.С., Шварцбурд С.И., Овчинский Б.В., Ашкинузе В.Г. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов средних школ с математической специализацией. / Н.Я. Виленкин, Р.С. Гутер, С.И. Шварцбурд и др. – М.: Просвещение, 1968.

7. Водинчар М.И., Лайкова Г.А., Гусева О.В. Метод концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенств // Математика в школе. – 1999. – №4. – С.73-74.

8. Ефремов А.В. Алгебра и начала анализа. – Казань: Татарское книжное изд-во, 1991.