VI Международная Конференция Учащихся
«Научно-творческий форум»

Научно-исследовательская работа

Предмет: экономика

исследовательская работа

Тема работы:

«Моделирование рынка с помощью матричных игр»

Автор:

Волынец Николай Петрович,
10 инженерно-технологический класс,
ГБОУ «Брянский городской лицей №1
имени А.С. Пушкина»

РУКОВОДИТЕЛЬ:
Ефремова Любовь Ивановна
учитель математики
Контактный телефон: **8-910-338-34-01**
Электронный адрес: **lubov-efrem@yandex.ru**

Брянск - 2025

Содержание

Стр.

I.Введение

Современные экономические условия в нашей жизни стали намного сложнее. Принимать важные стратегические решения для общества и частных лиц стало труднее. Именно, в моменты преодоления всех этих препятствий, появляется большой интерес к *математическим методам*, которые можно было бы применять в *экономике,* то есть к таким математическим методам, которые смогли бы выработать *лучшую стратегию* на решение действующих *проблем и на долгосрочные проекты.*

Таким видом выхода из сложившейся ситуации стало решение задач в экономике при помощи *матричных методов.* На промышленных предприятиях теория игр может применяться для выбора оптимальных решений, например, при создании *рациональных запасов сырья*, материалов, полуфабрикатов, когда противоборствуют *две тенденции*: *увеличения запасов*, гарантирующих бесперебойную работу производства, и *сокращения запасов* в целях минимизации затрат на их хранение.

В данной работе содержится информация о самих матрицах, операциях над ними и на примерах показано, как можно решать экономические задачи при помощи матриц.

Актуальность. Математика и экономика – две на первый взгляд далекие друг от друга науки. Однако, взаимосвязь между этими науками, роль математических методов при анализе экономических процессов, объектов и явлений были отмечены учеными ещё в XVII веке. Поэтому современному экономисту необходима основательная математическая подготовка, а, именно, **матричная алгебра.**

Цель исследования: рассмотреть основные понятия теории игр и матричные методы в экономике на примерах решения задач экономического содержания.

Объект исследования: математические понятия и законы, экономические модели теории игр.

Предмет исследования: матричные методы.

Гипотеза. Конфликтные ситуации приводят к возникновению различных видов игр. Главная задача теории игр – предсказать поведение участников конфликта. Цена игры, действительно, зависит от выбора стратегии игроками.

Задачи исследования:

- ✓ Изучить основные понятия теории матричных игр.
- ✓ Рассмотреть, как выполняются действия над матрицами.
- ✓ На примере задач показать связь математики и экономики.
- ✓ Научиться применять в экономике математический аппарат.
- ✓ Показать роль математических методов в экономике.
- ✓ Придумать задачи, которые решаются в чистых и смешанных стратегиях.

Методы исследования: эмпирические, а именно, изучение разнообразных источников информации, взятые на сайтах сети «Интернет», анализ полученных сведений; теоретические: анализ и синтез, чтобы лучше понять материал и получить общее представление об изучаемом явлении (моделирование рынка с помощью матричных игр). Аналогия, где я смог придумать и решить свои задачи: человек против природы и задачу экономического содержания.

II.Основная часть

2.1. Основные теоретические сведения

2.1.1. Основные понятия теории матричных игр

Теория игр – математическая теория конфликтных ситуаций, целью которой является **выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.** Применительно к *экономике* теория игр помогает понять, как компании или другие экономические агенты принимают решения, стремясь максимизировать собственную выгоду (выигрыш), учитывая при этом стратегии конкурентов или партнёров. [1]

Конфликтная ситуация – это столкновение интересов двух или более сторон.

Игра – это математическая модель конфликтных ситуаций, а также система предварительно оговоренных правил и условий. [1]

Партией называется частичная реализация правил и условий игры.

Результатом игры всегда является **число v**, которое называется выигрышем, проигрышем или ничьей. **Если $\upsilon > 0$ – выигрыш, если $\upsilon < 0$ – проигрыш,**

если $\upsilon = 0$ – ничья.

Партии состоят из ходов. **Ход –** регулярное действие, совершаемое игроком.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Например, стратегия снижения цены, увеличения рекламных затрат, внедрения инноваций и т.д. [1]

В зависимости от стратегий игры делятся: на ***конечные*** и ***бесконечные***. Игра называется ***конечной***, если у каждого игрока имеется в распоряжении только конечное число стратегий. В противном случае игра называется ***бесконечной***. [1]

Выигрыши – результаты, которые получают игроки в зависимости от выбранных всеми участниками игры стратегий. Выигрыш может выражаться в денежном эквиваленте, количестве привлечённых клиентов, доле рынка и т.д.

Правила игры – формальные (или неформальные) ограничения и условия, определяющие, какие действия доступны игрокам и как рассчитываются их выигрыши. [1]

Таким образом, **элементами игры являются: игроки, стратегии, выигрыш**

2.1.2. Игры с нулевой и ненулевой суммой

Игра с нулевой суммой. Один выиграл (υ), другой проиграл ($-\upsilon$) – это игра, в которой сумма выигрышей игроков равна нулю ($\upsilon+(-\upsilon))=0$, т.е. каждый игрок выигрывает только за счет других.

Самый простой случай – парная игра с нулевой суммой – **антагонистическая игра**, здесь два игрока четко играют друг против друга. Игры бывают с полной информацией, в этом случае игроки четко знают все правила игры и четко знают все шаги противника, и с неполной информацией.

Игры с постоянной разностью, в которых игроки выигрывают и проигрывают одновременно. Так, что им выгодно действовать сообща. Игры с ***ненулевой суммой*** *представляют собой промежуточный случай, где имеются конфликты и согласованные действия игроков.* [4]

Сегодня методы теории игр широко применяются в таких науках, как этика, биология, психология, социология, экономика и др.

Приведу примеры нобелевских премий в экономике.

Джон Нэш, 1994 г
За вклад в теорию игр

Роберт Джон Ауманн,2005 г
За концепцию долгосрочного сотрудничества в теории чисел

Томас Шеллинг, 2005 г
За теорию коалиционной и бескоалиционной игр

2.2. Моделирование рынка с помощью матричных игр

2.2.1. Первое представление о матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \min_j a_{ij} = \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max_i \min_j a_{ij} = 2$$

$$\max_i a_{ij} = \underbrace{2 \quad 5 \quad 4}_{\min_j \max_i a_{ij} = 2}$$

Рис.1

Матрица – это прямоугольная таблица, представляющая собой совокупность строк и столбцов. Размерностью матрицы называется величина m×n, где m-число строк, n-число столбцов. (Рис.1)

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае, количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов — количеству неизвестных. **В результате, решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.** А множество экономических задач можно свести к системам линейных уравнений. [4]

Операции с матрицами не слишком громоздки и не требуют чрезмерно кропотливой работы; напротив, *матричную алгебру* во многих случаях ценят, именно, за краткость, простоту и ясность. С помощью матричной алгебры можно выразить в математической форме многие задачи, как большие, так и малые, независимо от их размерности.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Одним из примеров может послужить *таблица распределения* *ресурсов по различным отраслям экономики.* **(Таблица 1)**

Так, например, элемент матрицы A_{22} = 2,5 показывает, сколько водных ресурсов потребляет сельское хозяйство, а элемент матрицы A_{13} = 7,1 показывает, сколько трудовых ресурсов потребляет торговля.

Ресурсы	Промышленность	Сельское хозяйство	Торговля
Трудовые ресурсы	4,8	6,7	7,1
Водные ресурсы	3,1	2,5	5,8
Электроэнергия	5,6	4,3	3,4

Таблица 1

Действия над матрицами (смотреть прложение 1) [6]

2.2.2. Матричные игры

В математике **под матричными играми** понимается игра двух лиц *с нулевой суммой, имеющих конечное число стратегий.* Выигрыш определяется матрицей игры (матрицей платежей), она же является нормальной формой игры.

Решение многих более сложных игровых моделей сводится к решению одной или нескольких матричных игр. [4]

Как происходит выбор стратегии в матричной игре? [4]

В свою очередь *первый игрок будет использовать такую чистую стратегию,* которая бы обеспечила ему *максимальный выигрыш*. Исходя из этих условий выигрыш первого игрока, который обозначим как **v_1, называется максиминным выигрышем** или **нижней ценой игры.**

Теперь определим величину проигрыша второго игрока, если он использует j-ю стратегию. В этом случае первый игрок использует такую свою чистую стратегию, при которой проигрыш второго игрока был бы максимальным. *Второй игрок должен выбрать такую чистую стратегию,* при которой его *проигрыш был бы минимальным.* Проигрыш второго игрока, который обозначим как v_2 , называется **минимаксным проигрышем** или **верхней ценой игры.** Дана матричная игра с платёжной матрицей.

Определить максиминную стратегию первого игрока минимаксную стратегию

$$A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ [3] \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} [5] & 7 & 6 \end{matrix} \end{array}$$

Рис.2

второго игрока, нижнюю и верхнюю цену игры. **(Рис.2)**

Решение. Справа от платёжной матрицы выпишем наименьшие элементы в её строках и отметим максимальный из них, а снизу от матрицы – наибольшие элементы в столбцах и выберем минимальный из них: максиминная стратегия первого игрока -5;минимаксная стратегия в торого игрока – 3**. (Рис.2)**

Седловая точка в матричных играх. *Если верхняя и нижняя цена игры одинаковая, то считается, что матричная игра имеет* **седловую точку**. Верно и обратное утверждение: *если матричная игра имеет седловую точку, то верхняя и нижняя цены матричной игры одинаковы.*

Соответствующий элемент одновременно является наименьшим в строке и наибольшим в столбце и равен цене игры. Таким образом, если $v_1 = v_2 = a_{ij}$, то i - оптимальная чистая стратегия первого игрока, а j - оптимальная чистая стратегия второго игрока.

В этом случае матричная игра имеет решение в чистых стратегиях.

Дана матричная игра с платёжной матрицей. Найти нижнюю и верхнюю цену игры. Имеет ли данная матричная игра седловую точку? (Рис.3)

Решение. Нижняя цена игры совпадает с верхней ценой игры. Таким образом, цена игры равна 5. То есть $v_1 = v_2 = v = 5$. Цена игры ра вна значению седловой точки $a_{23} = 5$.

$$A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ [5] \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 & 9 & [5] & 7 \end{matrix} \end{array}$$

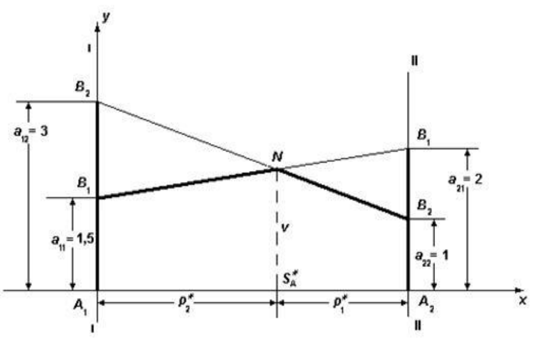
Рис.3

Максиминная стратегия первого игрока – вторая чистая стратегия, а минимаксная стратегия второго игрока – третья чистая стратегия.

Данная матричная игра имеет решение в чистых стратегиях.

2.3. Примеры решения экономических задач с помощью матриц

2.3.1. Графическое решение матриц[5]



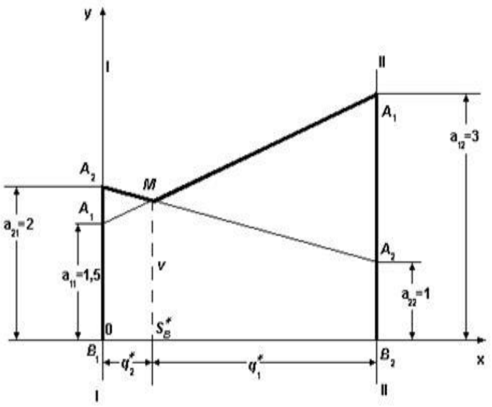


Рис.4. **Рис.5**

Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix}1{,}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Нижняя цена игры равна a_{11}=1,5. Верхняя цена игры равна a_{21}=2, седловая точка отсутствует. Для игрока А решение представлено на **рисунке 4.**

Точка N определяет оптимальную стратегию, а ордината - цену игры v. Найдем точку пересечения соответствующих прямых:

$v = 1{,}5p_1 + 2(1 - p_1)$

$v = 3p_1 + 1(1 - p_1)$

$1{,}5p_1 + 2(1-p_1) = 3p_1 + 1(1-p_1)$

$2{,}5p_1=1$, $p_1=0{,}4$, $p_1=0{,}6$, $v=1{,}8$.

Получаем N(0,6; 1,8). Следовательно, оптимальная стратегия игрока А заключается в выборе стратегии A_1 с вероятностью 0,6 и стратегии A_2 с вероятностью 0,4. **При этом цена игры v = 1,8.** Для игрока В решение представлено на **рис.5**. Находя точку пересечения соответствующих прямых, получаем: $1{,}5q_1 + 3(1- q_1) = 2q_1 + 1(1- q_1)$, $q_1=0{,}8$ M(0,2; 1,8).

Следовательно, оптимальная стратегия игрока В заключается в выборе стратегии B_1 с вероятностью 0,8 и стратегии B_2 с вероятностью 0,2 = 1-0,8. При этом цена игры v = 1,8.Оптимальное решение игры найдено.

2.3.2. Решение матричных задач с помощью кодирования (смотреть приложение 2).

2.3.3. Решение задачи технического содержания с помощью матричного анализа [5]

Два предприятия производят коляски, велосипеды и самокаты. Количество продукции каждого вида, производимые за месяц, приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 (ед. изм. – шт.)

Предприятие	Количество продукции (шт.)		
	Коляски	Велосипеды	Самокаты
I предприятие	112	335	217
II предприятие	210	165	382

Данные о прибыли (в условных денежных единицах) от реализации единицы каждого вида изделий в каждый из трех месяцев приведены в таблице 2.2

Таблица 2.2 (ед. изм. – шт.)

Предприятие	Прибыль (усл. ден. ед.)		
	Апрель	Май	июнь
Коляски	43,2	67,2	55,3
Велосипеды	54,1	89,7	70,5
Самокаты	45,4	50,4	55,5

Составить матрицу прибыли каждого предприятия в каждый из трех месяцев. Пояснить экономический смысл результата.

Составляем матрицы: $A=\begin{pmatrix} 112 & 335 & 217 \\ 210 & 165 & 382 \end{pmatrix}$ – матрица количества продукции каждого вида, производимые за месяц каждым предприятием и

$B=\begin{pmatrix} 43{,}2 & 67{,}2 & 55{,}3 \\ 54{,}1 & 89{,}7 & 70{,}5 \\ 45{,}4 & 50{,}4 & 55{,}5 \end{pmatrix}$- матрица прибыли от реализации единицы каждого

вида продукции в разные месяцы. Матрицу прибыли каждого предприятия в любой из рассматриваемых месяцев находим как произведение матриц A и B:

$$P= A\cdot B=\begin{pmatrix} 112 & 335 & 217 \\ 210 & 165 & 382 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 43{,}2 & 67{,}2 & 55{,}3 \\ 54{,}1 & 89{,}7 & 70{,}5 \\ 45{,}4 & 50{,}4 & 55{,}5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34766{,}7 & 48512{,}7 & 2141854{,}6 \\ 38779{,}3 & 48165{,}3 & 44446{,}5 \end{pmatrix}$$

Прибыль первого предприятия за реализацию колясок составит 34766,7 условных денежных единиц, за реализацию велосипедов 48512,7 условных денежных единиц, за реализацию самокатов 41854,6 условных денежных единиц. По второму предприятию соответствующие прибыли равны 38779,3;

48165,3; 44446,5 условных денежных единиц.

Ответ: I предприятие: коляски - 34766,7 у.е.; велосипеды -48512,7 у.е.; самокаты -41854,6 у.е. **II предприятие**: коляски -38779,3 у.е.; велосипеды - 481 65,3 у.е.; самокаты -44446,5 у.е.

2.3.3. Игры с природой. Решение придуманной задачи.

Игра, в которой осознанно действует только один из игроков, называется игрой с природой. «Природа» - это обобщенное понятие противника, не преследующего собственных целей в данном конфликте, хотя такую ситуацию конфликтом можно назвать лишь условно. Природа может принимать одно их с воих возможных состояний и не имеет целью получения выигрыша. [3]

Различают два вида задач в играх с природой:

1. Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждого из возможности состояний.

2. Задачи о принятии решений в условиях неопределённости, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы. [3]

Игра с природой представляется в виде платежной матрицы, элементы которой – выигрыш игрока А, но не являются проигрышами природы П.

Задача. *Некоторая торговая фирма продает различные сувениры и украшения. Для увеличения своих продаж фирма может уменьшить все цены на 10-25%. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию продаж фирмы, обеспечивающую ей максимальный доход.*

Решение. Стратегии: a_1- уменьшение на 10%, a_2 –уменьшение на 25% ,

θ_1- хорошая погода, θ_2- плохая погода.

Составим матрицу финансовых потерь, то есть альтернативную матрицу потерь потребителя при ухудшении погодных условий **(таблица 3).**

Вероятности, с которыми сбываются прогнозы хорошей/плохой погоды:

$$P(x_1|\theta_1) = 0,6 \qquad P(x_2|\theta_1) = 0,1.$$

Вероятности, с которыми не сбываются прогнозы хорошей/плохой погоды

$P(x_1 | \theta_2) = 0,4 \qquad P(x_2 | \theta_2) = 0,9$

Таблица 3 Матрица финансовых потерь Ед. изм (млн.руб)

II \ I	a_1	a_2
θ_1	1,82	1,74
θ_2	0,58	0,80

Составим функцию риска (таблица 4). Для решения задачи нам понадобятся сведения о вероятностях, с которыми сбываются прогнозы о хорошей и плохой погоде. **Матрица риска** описывает все возможные стратегии фирмы при различных фактических состояниях погода: все время придерживаться стратегии a_1 (снижение цены на 10 %), при хорошей погоде придерживаться стратегии a_1, а при плохой a_2 (снижение цены на 25%), поступить наоборот или все время придерживаться стратегии a_2. Матрица риска и вероятности, с которыми сбываются прогнозы, позволили мне найти значения финансовых потерь фирмы для всех стратегий в матрице риска.

Таблица 4 Матрица риска

II \ I	d_1	d_2	d_3	d_4
x_1	a_1	a_1	a_2	a_2
x_2	a_1	a_2	a_1	a_2

$R(\theta_1,d_1) = 1{,}82\cdot 0{,}6 + 1{,}82\cdot 0{,}4 = 1{,}82$ $R(\theta_2, d_1) = 0{,}58\cdot 0{,}1 + 0{,}58\cdot 0{,}9 = 0{,}58$

$R(\theta_1, d_2) = 1{,}82\cdot 0{,}6 + 1{,}74\cdot 0{,}4 = 1{,}788$ $R(\theta_2, d_2) = 0{,}58\cdot 0{,}1 + 0{,}80\cdot 0{,}9 = 0{,}778$

$R(\theta_1,d_3) = 1{,}82\cdot 0{,}4 + 1{,}74\cdot 0{,}6 = 1{,}772$ $R(\theta_2, d_3) = 0{,}58\cdot 0{,}9 + 0{,}80\cdot 9{,}1 = 0{,}632$

$R(\theta_1, d_4) = 1{,}74\cdot 0{,}6 + 1{,}74\cdot 0{,}4 = 1{,}74$ $R(\theta_2 ,d_4) = 0{,}80\cdot 0{,}1 + 0{,}80\cdot 0{,}9 = 0{,}80$

	θ \ d	d_1	d_2	d_3	d_4	min
R(θ,d)	θ_1	1,82	1,788	1,772	1,74	**1,74**
	θ_2	0,58	0,778	0,632	0,80	0,58
	max	1,82	0,788	1,772	**1,74**	

Задача имеет седловую точку.

Ответ: фирма вне зависимости от погодных условий должна снизить цену на 25%, тогда потери не превысят 1,74 млн. руб.

2.3.4. Решение задачи собственного сочинения, не имеющей решения

в чистых стратегиях.

Не любая платежная матрица имеет седловую точку. Я составил задачу о продаже обуви, которая не имеет решения в чистых стратегиях.

Задача «Гибкая цена». Одна фирма продаёт различные модели обуви. Все модели продаются по одной и той же цене 40 евро. Известно, что за неделю было произведено 1000 пар. Ожидается, что далее интерес покупателей снизится. Для повышения спроса фирма рассматривает две стратегии изменения цены. **Первая** – снижение цены на пару обуви на 25% и новая цена составит 30 евро. **Вторая** – снижение цены на 15%, следовательно, новая цена будет 34 евро.

Исследования показали, что спрос покупателей придерживается двух стратегий. **Первая стратегия** клиентов, что независимо от процента скидки на обувь, дополнительно будет куплено 200 пар. **Вторая стратегия** клиентов – если цена будет снижена более, чем на 20% , то дополнительно будет куплено 250 пар, а если цена на обувь будет снижена менее, чем на 20%, то будет закуплено 150 пар. Какова оптимальная стратегия фирмы и покупателя? И какова ожидаемая прибыль? **Составим таблицу 5**

Спрос Покупателей / **Предложение фирмы**	Покупка 200 пар, дополнительно несмотря на снижение цены	Покупка дополнительно 250 пар при снижении цены более чем на 20% и покупка 150 пар при снижении цены менее чем на 20%
Снижение цены на 25%, т.е. продажа её по цене 30 €	$200 \cdot 30 = 6000$ €	$250 \cdot 30 = 7500$ €
Снижение цены на 15%, т.е. продажа её по цене 34 €	$200 \cdot 34 = 6800$ €	$150 \cdot 34 = 5100$ €

Условие задачи позволяет нам составить платежную матрицу.

$$\begin{array}{l} \text{Покупатель} \\ \text{Продавец} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 30\ € \\ 34\ € \end{array} \begin{pmatrix} 6\,000 & 7\,500 \\ 6\,800 & 5\,100 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \Rightarrow 6\,000 \\ \Rightarrow 5\,100 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \Downarrow & \Downarrow \\ 6\,800 & 7\,500 \end{array}$$

$\underline{V}=6\,000$ максиминный выигрыш (нижняя цена игры)

$\overline{V}=6\,800$ минимаксный проигрыш (верхняя цена игры)

Максимин этой игры – 6000 евро, а минимакс – 6800 евро. Они не совпадают. *Максимин представляет собой нижнюю цену игры, а минимакс – верхнюю. Это означает, что задача не имеет решения в чистых стратегиях, так как не имеет седловой точки. Однако это вовсе не означает, что задача не имеет оптимального решения.*

Теоретические основы решения задачи в смешанных стратегиях. Если имеется платежная матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{h_{11}} & \mathbf{h_{12}} \\ \mathbf{h_{21}} & \mathbf{h_{22}} \end{pmatrix}$, которая не имеет решения в чистых стратегиях, то можно рассчитать вероятности, с которыми игроки должны использовать набор свой стратегий для достижения равновесной ситуации. В основе расчётов лежат следующие формулы: [2]

$P^* = \left(p_1^* = \frac{h_{22}-h_{21}}{h_{11}-h_{12}-h_{21}+h_{22}}, \quad p_2^* = 1 - p_1^*\right)$ –оптимальная смешанная стратегия игрока I

$Q^* = \left(q_1^* = \frac{h_{22}-h_{12}}{h_{11}-h_{12}-h_{21}+h_{22}}, \quad q_2^* = 1 - q_1^*\right)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока II

$V = \frac{h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}}{h_{11}-h_{12}-h_{21}+h_{22}}$ – цена игры.

Я использовал эти формулы для решения задачи в смешанных стратегиях.

$$P^* = \frac{6000-7500}{6000-7500-6800+5100} \approx 0,47 \Rightarrow P^* = (0,53;\ 0,47)$$

оптимальная смешанная стратегия фирмы (значения вероятности соблюдения или I и II стратегий)

$$Q^* = \frac{6800-6000}{6000-7500-6800+5100} \approx 0,25 \Rightarrow Q^* = (0,75;\ 0,25)$$

оптимальная смешанная стратегия покупателями (значения вероятности соблюдения ими I и II стратегии).

$$V^* = \frac{6800.5100-6800.7500}{6000-7500-6800+5100} = 6375\ € \Rightarrow 6375\ € \text{ - цена игры.}$$

Расчёты показали, что фирма должна использовать свою первую стратегию с вероятностью 0,53 или в 53% случаев, а вторую – с вероятностью 0,47 или в 47% случаев.

Для оптимизации расходов клиенты должны использовать свою первую стратегию в 75% случаев, а вторую стратегию в остальных 25% случаев. Это можно сделать следующим образом: 75% клиентов должны применять первую стратегию, а 25% клиентов должны применять вторую стратегию. Конечно, контролировать поведение клиентов до такой степени невозможно,но если они не придерживаются этой стратегии, то фирма получит больше ожидаемой прибыли в 6375 евро.

Вывод: *Гарантированый дополнительный доход фирмы в 6375 €. Для его получения в течение следующих n дней продаж:* $0{,}53 \cdot n$ *дней фирма должна применять первую стратегию, а* $0{,}47 \cdot n$ *дней – вторую стратегию. Например, если* $n = 10$, *то примерно 5 дней применять первую стратегию и на 6 день перейти ко второй стратегии.* Это цена игры.

III. Заключение

Проанализировав применение матричной алгебры в экономике, можно прийти к выводу, что использование матриц имеет свои **достоинства** и **недостатки.**

Недостатки заключаются в том, что матричная алгебра не обеспечивает реальных рекомендаций по разработке специфических стратегий; по матрицам невозможно определить сферы бизнеса, которые готовы стать победителями.

Достоинства же применения матриц в том, что они используют широкий набор стратегически значимых переменных; указывают направление движения ресурсов.

В современных условиях особенно актуально использование матриц для формирования баз данных, ведь вся информация обрабатывается и хранится в форме матриц. Из выше рассмотренного можно сделать вывод, что роль матриц в экономике очень велика.

Выдвинутая гипотеза подтвердилась. Если каждый из игроков выбирает только одну стратегию определенным, а не случайным образом (*чистая стратегия),* решение игры заключается в выборе такой стратегии, которая удовлетворяет условию оптимальности. Это условие состоит в том, что один игрок получает максимальный выигрыш, если второй придерживается своей стратегии. *В смешанных стратегиях* игроки используют свои чистые стратегии случайным образом. *В смешанных стратегиях выиграть*, значит, получить *максимальный средний выигрыш.* Оптимальная смешанная стратегия обеспечивает игроку такой выигрыш независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий с ненулевой вероятностью.

Лично для меня эта работа оказалась трудной, но посильной. Я расширил свой кругозор в области теории игр, имею представление о моделировании рынка с помощью матричных игр, научился графически решать матрицу, придумал две задачи в чистых и смешанных стратегиях. Этого материала нет в школьных учебниках. Поэтому, из моих одноклассников никто не умеет работать с матрицами. В работе доступно объясняется, что такое «математическая матрица» и как её применять. На примере рассмотренных задач показана связь математики и экономики.

IV. Список источников информации

[1] Деркач Д.В. Матричные игры: задания и методические рекомендации по выполнению самостоятельных расчетных работ. Учебно-методическое пособие, Армавир,2010

[2] Кремлев, А.Г. К79 Основные понятия теории игр: учебное пособие / А.Г. Кремлев.— Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016.— 144 с.

[3] Лабскер Л.Г. Экономические игры с природой: практикум с решениями задач / Л.Г. Лабскер, Н.А. Ященко. – М.: КноРус, 2017. – 512 с.

[4] Лемешко Б.Ю. Теория игр и исследование операций / Лемешко Б.Ю. - Новосиб.:НГТУ, 2013. - 167 с.

[5] Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения / В.В. Мазалов. - М.: Лань, 2016. - 448 с.

[6] https://zaochnik.ru/blog/matricy-i-osnovnye-dejstviya-nad-nimi/?ysclid=m5jx0o1gzz882436092

[7] https://javarush.com/groups/posts/matrica-v-python?utm_source

V. Приложения

Приложение 1 Действия над матрицами [6]

Операции сложения и вычитания матриц

Можно складывать только матрицы одинакового размера. В результате получится матрица того же размера. Складывать (или вычитать) матрицы просто – ***достаточно только сложить их соответствующие элементы***. Приведем пример. Выполним сложение двух матриц A и B размером три на три. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Найти: A+B, A-B

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 5+2 & 4+3 \\ 1+0 & -1+0 & 2+5 \\ 7+7 & 5+4 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 1 & -1 & 7 \\ 14 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-1 & 5-2 & 4-3 \\ 1-0 & -1-0 & 2-5 \\ 7-7 & 5-4 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычитание выполняется по аналогии, только с противоположным знаком.

Умножение матрицы на число

На произвольное число можно умножить любую матрицу. Чтобы сделать это, ***нужно умножить на это число каждый ее элемент.*** Например, умножим матрицу A из первого примера на число 5:

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 12 & 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot (-5) & 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & -5 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$$

Операция умножения матриц

Перемножить между собой удастся не все матрицы. Например, у нас есть две матрицы - A и B. Их можно умножить друг на друга только в том случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. При этом ***каждый элемент получившейся матрицы, стоящий в i-ой строке и j-м столбце, будет равен сумме произведений соответствующих элементов в i-й строке первого множителя и j-м столбце второго***. Чтобы понять этот алгоритм, запишем, как умножаются две квадратные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2d_1 & a_1c_2 + a_2d_2 \\ b_1c_1 + b_2d_1 & b_1c_2 + b_2d_2 \end{pmatrix}$$

И пример с реальными числами. Умножим матрицы:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 0\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Перемножить матрицы три на три: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **и** $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{7} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1\cdot 1 + 0\cdot 6 + 2\cdot 5) & (1\cdot(-5) + 0\cdot 2 + 2\cdot(-1)) & (1\cdot 3 + 0\cdot(-4) + 2\cdot 7) \\ (0\cdot 1 + (-1)\cdot 6 + 3\cdot 5) & (0\cdot(-5) + (-1)\cdot 2 + 3\cdot(-1)) & (0\cdot 3 + (-1)\cdot(-4) + 3\cdot 7) \\ (3\cdot 1 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5) & (3\cdot(-5) + 2\cdot 2 + 1\cdot(-1)) & (3\cdot 3 + 2\cdot(-4) + 1\cdot 7) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -8 & 17 \\ 9 & -5 & 25 \\ 20 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

Операция транспонирования матрицы

Транспонирование матрицы – это операция, когда соответствующие строки и столбцы меняются местами. Например, транспонируем матрицу А из первого примера:

A= $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A^T}$=$\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Приложение 2

2.3.2. Решение матричных задач с помощью кодирования [7]

Матричные игры легко реализуются в виде кода на Python (или другом языке программирования) путём:

1. Формализации задачи (описание матрицы выплат).
2. Записи задачи линейного программирования для поиска оптимальных (смешанных) стратегий и вычисления ценности игры.
3. Использования существующих ЛП-библиотек для решения.

Это даёт универсальный и удобный способ не только «на бумаге» разбирать небольшие матрицы, но и решать (и визуализировать результаты) для более масштабных задач.

Рассмотрим простую матрицу выплат (2 на 3) для игроков A и B, где строки — стратегии A, а столбцы — стратегии B: $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

Решу эту матрицу третьим способом.

```
!pip install pulp

import pulp

# Матрица выплат: каждая внутренняя "строка" - это набор выплат при фиксированном выборе с
payoff_matrix = [
    [1, -1,  2],  # A выбирает стратегию 0
    [0,  3, -2]   # A выбирает стратегию 1
]

# Размеры
m = len(payoff_matrix)       # число стратегий A
n = len(payoff_matrix[0])    # число стратегий B

# --------------------
# 1. Задаём задачу ЛП:
#    Первая часть: Игрок A ищет смешанную стратегию p = (p1, p2, ..., pm), максимизирующую
#    Условия:
#       p1 + p2 + ... + pm = 1
#       p_i >= 0
#    При этом для любого выбора j (стратегия B), должно выполняться:
#       p1 * a_1j + p2 * a_2j + ... + pm * a_mj >= v
# --------------------

problem = pulp.LpProblem("MatrixGame", pulp.LpMaximize)
```

Вывод:

Решение матричных задач с помощью программирования является мощным и универсальным подходом, позволяющим автоматизировать сложные вычисления и анализ данных. Использование кода для работы с матрицами имеет множество преимуществ:

- ✓ **эффективность и скорость** (компьютеры выполняют матричные операции значительно быстрее, чем это возможно вручную, особенно, для больших матриц);

- ✓ **точность** (программные инструменты устраняют человеческий фактор ошибок, возникающих при ручных вычислениях); автоматизация (используя код, можно легко решать однотипные задачи или обрабатывать большие объёмы данных без повторного ввода);
- ✓ **гибкость множество библиотек** (например, NumPy, SymPy, SciPy) предоставляют готовые инструменты для работы с матрицами, включая операции сложения, умножения, вычисления определителей, нахождения обратных матриц и решения систем линейных уравнений.

```
# Переменные:
# p_0, p_1, ..., p_(m-1) – вероятности, с которыми A выбирает соответствующие стратегии
p = [pulp.LpVariable(f"p_{i}", lowBound=0) for i in range(m)]
# v – ценность игры
v = pulp.LpVariable("v", lowBound=None)  # может быть положительной или отрицательной, без

# Целевая функция – максимизировать v
problem += v, "Maximize_the_game_value"

# Условие, что сумма вероятностей равна 1
problem += pulp.lpSum(p) == 1, "sum_of_probabilities_is_1"

# Ограничения типа p1*a1j + p2*a2j + ... >= v для каждого j
for j in range(n):
    problem += pulp.lpSum(p[i] * payoff_matrix[i][j] for i in range(m)) >= v, f"constraint

# --------------------
# 2. Решаем задачу:
# --------------------
problem.solve(pulp.PULP_CBC_CMD(msg=0))

print("Status:", pulp.LpStatus[problem.status])

# Получаем найденные значения вероятностей
p_values = [p[i].varValue for i in range(m)]
v_value = v.varValue

print(f"Оптимальные вероятности для A: {p_values}")
print(f"Ценность игры (v) = {v_value}")
```