

**VI Международная Конференция Учащихся
«Научно-творческий форум»**

Научно-исследовательская работа

Предмет: математика

Тема работы

«Конические сечения: конус с цветным песком»

Выполнил:

Павлов Евгений Владимирович
обучающийся __10__ класса
ГБОУ «Брянский городской лицей №1 имени
А.С. Пушкина

Руководитель:

Ефремова Любовь Ивановна,
учитель математики,
ГБОУ «Брянский городской лицей №1 имени
А.С. Пушкина
Ученое звание: советник

Брянск -2025

Содержание

	Стр.
I. Введение.....	3-4
II. Основная часть	4-13
2.1. Конические сечения прямого кругового конуса.....	4-6
2.1.1. Понятие конуса.....	4-5
2.1.2. Образование конических сечений и их типы.....	5-6
2.2. Кривые второго порядка.....	6-11
2.2.1. Уравнение окружности	6-7
2.2.2. Уравнение эллипса.....	7-8
2.2.3. Уравнение параболы.....	8-9
2.2.4. Уравнение гиперболы.....	9-11
2.3. Создание модели - демонстратора сечений конуса	
«Конические сечения: конус с цветным песком».....	11-13
2.4. Результаты анкетирования	15-16
III. Заключение	13-14
IV. Список источников информации	14
V. Приложения	15-16

I. Введение

Актуальность темы исследования.

Конические сечения были известны уже математикам Древней Греции (например, Менехму, 4 в. до н.э.); с помощью этих кривых решались некоторые задачи на построение (удвоение куба и др.), оказавшиеся недоступными при использовании простейших чертёжных инструментов — циркуля и линейки. В первых исследованиях, дошедших до нас, греческие геометры получали конические сечения, проводя секущую плоскость перпендикулярно к одной из образующих. При этом, в зависимости от угла раствора при вершине конуса (т.е. наибольшего угла между образующими одной полости), линия пересечения оказывалась эллипсом, если этот угол — острый, параболой, если — прямой, и гиперболой, если — тупой. Наиболее полным сочинением, посвященным этим кривым, были «Конические сечения» Аполлония Пергского (около 200 до н.э.). [2]

Уже второй год я занимаюсь в сетевой проектной школе, но в этом учебном году в другой секции - «Музей занимательной математики», где нужно сделать экспонат для музея занимательных наук г. Архангельска. Почему, именно, г. Архангельск, хотя музеев занимательных наук в России девять. Потому, что наш наставник Павлова Мария Александровна является доцентом кафедры экспериментальной математики и информатизации образования в Северном Арктическом федеральном университете (САФУ) имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск.

Было предложено сначала познакомиться с экспонатами виртуального музея, а потом уже выдвигались идеи для новых экспонатов. Посоветовавшись с учителем математики Любовью Ивановной, решил остановиться на сечениях конуса плоскостью. Так появилась идея написать исследовательскую работу **«Конические сечения: конус с цветным песком»**. Ведь не за горами 10-11 классы, где изучается уже стереометрия, а тема «Сечения конической поверхности» выносится на 1 полугодие 11 класса, то есть все в жизни пригодится.

Объект исследования: конические сечения.

Предмет исследования: историческое развитие конических сечений.

Гипотеза: сечением любого прямого круглого конуса плоскостью (не проходящей через его вершину) определяется кривая, которая может быть лишь гиперболой, параболой или эллипсом.

Цель исследования: исследовать различные виды конических сечений и создать модель демонстратора сечений конуса.

Задачи исследования:

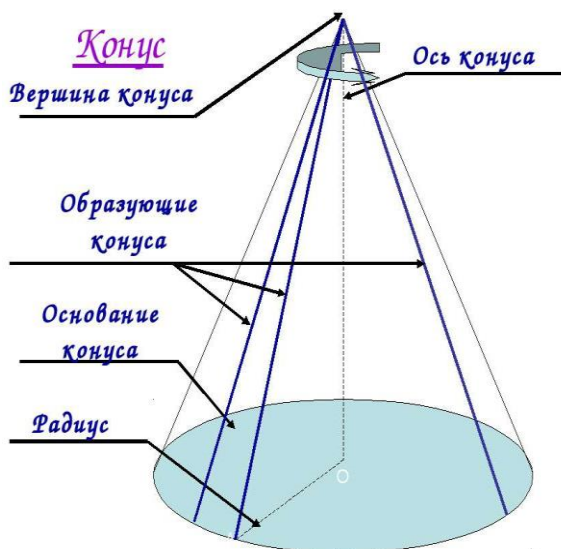
- познакомиться с историей возникновения конических сечений;
- рассмотреть понятие конуса и его основные элементы;
- перечислить основные виды конических сечений;
- изучить уравнения кривых второго порядка: эллипса, параболы, гиперболы;
- провести социологический опрос в 11 профильных классах на предмет сечений конуса плоскостью;
- исследовать видео «Конические сечения: конус с водой» из фонда «Математические этюды»(etudes.ru), разработанным математическим институтом имени В.А. Стеклова Российской Академии Наук; [5]
- создать модель демонстратора сечений конуса.

Перечислим методы исследования: *сравнение, анализ и синтез* (при изучении литературы по данной проблеме); *анкетирование и опрос* (при изучении актуальности проблемы); *поиск, наблюдение, дедукция* (чтобы из предложенных экспонатов для виртуального музея, выбрать тот, который я могу создать), *математический* (при создании развёртки конуса и основного стенда, при вычислении объема конуса), *аналитическое обобщение* (где на основе различных мнений, я делаю собственные выводы) .

II. Основная часть

2.1. Конические сечения прямого кругового конуса

2.1.1.Понятие конуса [1]

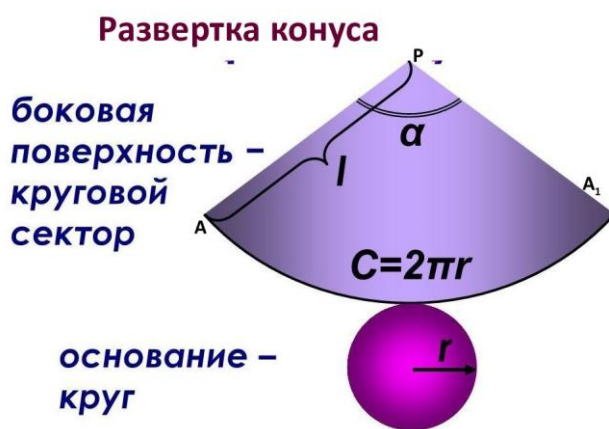


Конус - тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L . (Рис.1)

Круг называется **основанием конуса**, вершина конической поверхности – **вершиной конуса**, отрезки образующих, заключенные между вершиной и основанием, – **образующими конуса**, а образованная ими часть конической

Рис.1 поверхности – **боковой поверхностью конуса**.

Ось конической поверхности называется осью конуса, а её отрезок, заключенный между вершиной и основанием, – высотой конуса. Все образующие конуса равны друг другу.



За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь её развертки, которая равна **произведению половины длины окружности основания на образующую**.

$$S_{\text{бок}} = \pi r l \text{ (Рис.2)}$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}Sh. \text{ Объем конуса равен одной}$$

трети произведения площади основания на высоту.

Рис.2

2.1.2. Образование конических сечений и их типы

Конические сечения — это линии, которые образуются в сечении прямого кругового конуса с различными плоскостями.

Классифицируя эти линии по характеру расположения секущих плоскостей относительно образующих конуса, получают кривые трех типов: (рис.3)

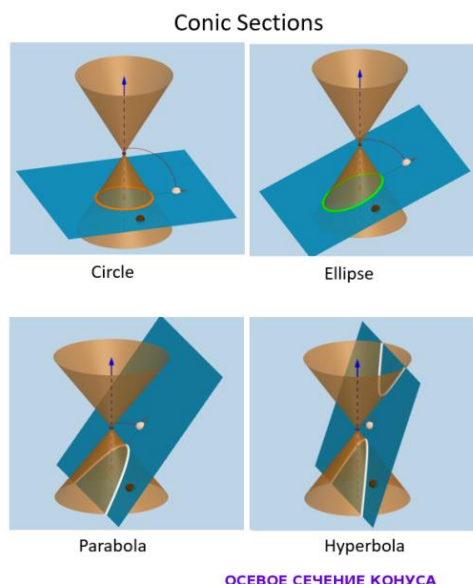
I. Кривые, образованные сечением конуса плоскостями, **не параллельными**

ни одной из образующих. Таковыми кривыми будут различные **окружности и эллипсы.** Эти кривые называются кривыми эллиптического типа.

II. Кривые, образованные сечением конуса плоскостями, каждая из которых **параллельна какой-нибудь одной из образующих конуса.** Таковыми кривыми будут только **параболы.**

III. Кривые, образованные сечением конуса плоскостями, каждая из которых **параллельна каким-нибудь двум образующим.** Таковыми кривыми будут **гиперболы.**

Никакого IV типа кривых уже быть не может, так как не может быть плоскости, параллельной сразу трем образующим конуса, поскольку никакие три образующих конуса не лежат в одной плоскости.

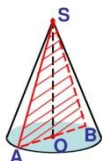


Заметим, что конус можно пересечь плоскостями и так, чтобы в сечении получились две прямые. Для этого секущие плоскости надо проводить через вершину конуса.

Если секущая плоскость проходит через **ось конуса**, то сечение представляет собой **равнобедренный треугольник**, основание которого – диаметр основания конуса, а боковые стороны – образующие конуса. Это сечение

называется **осевым.**

Рис.3



2.2. Кривые второго порядка

2.2.1. Уравнение окружности

С точки зрения аналитической геометрии коническое сечение представляет собой геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению второго порядка. [2].

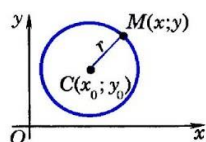
Кривой 2-го порядка называется линия на плоскости, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \text{ [2].}$$

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности.

Уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



2.2.2 Уравнение эллипса[6]

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная,

большая, чем расстояние между фокусами. (Рис.4а)

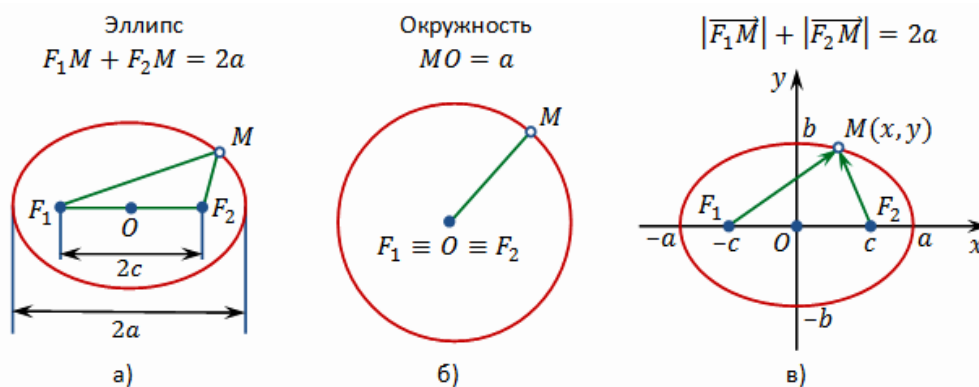


рис.4

Действительно, введем прямоугольную систему координат (рис.4в). Центр эллипса примем за начало системы координат; прямую, проходящую через фокусы (фокальную ось или первую ось эллипса), примем за ось абсцисс; прямую, перпендикулярную фокальной оси и проходящую через центр эллипса (вторую ось эллипса), примем за ось ординат (направление на оси ординат выбирается так, чтобы прямоугольная система координат оказалась правой).

Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Фокальное свойство эллипса.

Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса, расстояние между ними $2c = F_1F_2$ — фокусным расстоянием, середина отрезка O — центром эллипса, число $2a$ — длиной большой оси эллипса (соответственно, число a — большой полуосью эллипса). Отрезки F_1M и F_2M , соединяющие произвольную точку M эллипса с его фокусами, называются фокальными радиусами точки M . (Рис.4в)

Отношение $e = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса. Из определения ($2a > 2c$) следует, что $0 \leq e < 1$. При $e = 0$, т.е. при $c = 0$, фокусы F_1 и F_2 , а также центр O совпадают, и эллипс является окружностью радиуса a (рис.46). [6].

2.2.3. Уравнение параболы

Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, где $p > 0$ – действительное число. Нетрудно заметить, что в своём стандартном положении парабола «лежит на боку» и её вершина находится в начале координат. При этом функция $y = \sqrt{2px}$ задаёт верхнюю ветвь данной линии, а функция $y = -\sqrt{2px}$ – нижнюю ветвь. Очевидно, что парабола симметрична относительно оси Ox .

Например: построить параболу $y^2 = 4x$

Решение: вершина известна, найдём дополнительные точки.

Уравнение $y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ определяет верхнюю дугу параболы, уравнение

$y = -2\sqrt{x}$ – нижнюю дугу. В целях сократить запись вычисления проведём

«под одной гребёнкой»: $y = \pm 2\sqrt{x}$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$\pm 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2}$	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$	± 4

Таблица 1

Для компактной записи результаты сведём в таблицу 1. Эксцентриситет любой параболы равен единице: $\varepsilon = 1$.

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой d , не проходящей через точку F .

Точка F называется **фокусом** параболы, прямая d **директрисой** параболы.

Константа «пэ» канонического уравнения $y^2 = 2px$ называется **фокальным параметром**, который равен расстоянию от фокуса до директрисы. В

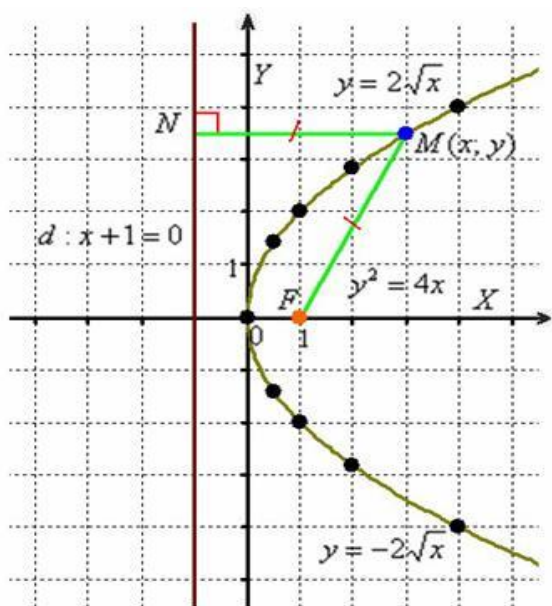


Рис. 5

данном случае: $p=2$. При этом фокус имеет координаты $F(\frac{p}{2};0)$, а директриса задаётся уравнением: $x+\frac{p}{2}=0$. (Рис.5)

В нашем примере: $F(1;0)$, $d: x+1=0$. Определение параболы понимается ещё проще, чем определения эллипса и гиперболы. Для любой точки $M(x;y)$ параболы длина отрезка FM (расстояние от фокуса до точки) равна длине перпендикуляра MN (расстоянию от точки до директрисы): $|FM| = |MN|$.

2.2.4. Уравнение гиперболы

Гиперболой называют множество всех точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1, F_2 – есть величина постоянная, численно равная расстоянию между вершинами этой гиперболы: $2a$.

При этом расстояние между фокусами превосходит длину действительной оси $F_1F_2 > 2a$. Если гипербола задана каноническим уравнением: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

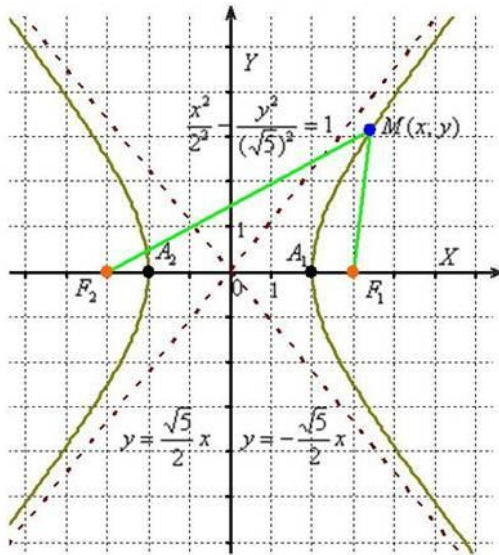
то расстояние от центра симметрии до каждого из фокусов рассчитывается по формуле: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. И, соответственно, фокусы имеют координаты: $F_1(c;0)$, $F_2(-c; 0)$. Для исследуемой гиперболы:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \quad c = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

$$F_1(3, 0), F_2(-3, 0)$$

Рис. 6

Разбираемся в определении. Обозначим через $|F_1M|$, $|F_2M|$ расстояния от фокусов до произвольной точки $M(x;y)$ гиперболы: сначала мысленно передвигаем синюю точку по правой ветви гиперболы – где бы мы ни находились, модуль (абсолютное значение) разности между длинами отрезков F_1M , F_2M будет одним и тем же: $||F_1M| - |F_2M|| = 2a = \text{const}$.



Если точку $M(x;y)$ «перекинуть» на левую ветвь и перемещать её там, то данное значение останется неизменным. Знак модуля нужен по той причине, что разность длин $|F_1M| - |F_2M|$ может быть как положительной, так и отрицательной. Кстати, для любой точки правой ветви $|F_1M| - |F_2M| < 0$ (поскольку отрезок F_1M короче отрезка F_2M). Для

Рис. 6 любой точки $M(x;y)$ левой ветви ситуация ровно противоположная и $|F_1M| - |F_2M| > 0$.

Более того, ввиду очевидного свойства модуля: $||F_1M| - |F_2M|| = ||F_2M| - |F_1M||$, поэтому, безразлично, что из чего вычитать. Удостоверимся, что в нашем примере модуль данной разности действительно равен расстоянию между вершинами. Мысленно поместите точку $M(x;y)$ в правую вершину гиперболы (A_1). Тогда: $|F_1M| - |F_2M| = |1-5| = |-4| = 4=2a$, что и требовалось проверить. **Эксцентриситетом** гиперболы называют отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Так как расстояние от центра до фокуса больше расстояния от центра до вершины: $c > a$, то эксцентриситет гиперболы всегда больше «единицы»:

$$\varepsilon > 1. \quad \text{Для данного примера: } \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

Эллипс, гиперболу и параболу ещё называют **кониками** (коническими сечениями). **Рассмотрим теорему.** [7].

- 1) Любое сечение кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, является эллипсом, гиперболой, параболой.
- 2) Любую конику можно получить сечением некоторого кругового конуса с любым наперед заданным углом α между осью конуса и образующей. **Первую часть теоремы** я проверил практически, изготовив модель – демонстратор сечений конуса **«Конические сечения: конус с цветным**

песком». Об этом будет рассказано ниже.

А вторую часть теоремы можно доказать аналитически. (Рис. 7- 8)

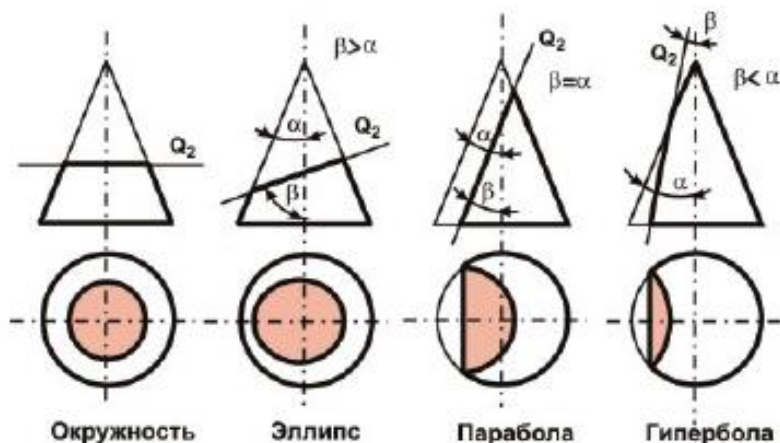


Рис.7

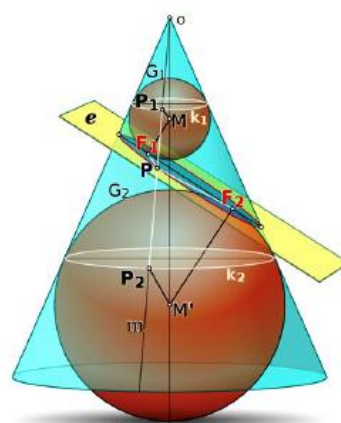


рис.8

Сравнивая два угла: α — между осью конуса и образующей и β — между секущей плоскостью и осью конуса. И вот результат: если $\alpha < \beta$, то в сечении получится эллипс или окружность (частный случай эллипса $\beta = \frac{\pi}{2}$), если $\alpha = \beta$ — парабола, а при $\alpha > \beta$ — ветвь гиперболы. [7].

Изящное доказательство этой теоремы было предложено в 1822 году Данделеном, французским математиком 19 века.

Идея доказательства этой теоремы заключается в геометрическом построении с помощью сфер Данделена, касающихся плоскости сечения в точках F_1 и F_2 (рис.8). Возьмем произвольную точку P , лежащую на сечении PF_1 является касательной к меньшей сфере. PO также является касательной к сфере в точке P_1 , $|PF_1| = |PP_1|$. Аналогично, PF_2 и PP_2 являются касательными к большей сфере и $|PF_2| = |PP_2|$. Поскольку точки: P, P_1, P_2 лежат на одной прямой, получаем: $|PF_1| + |PF_2| = |PP_1| + |PP_2| = |P_1P_2| = \text{const}$

Таким образом, все точки этого сечения будут лежать на некотором эллипсе с фокусами F_1 и F_2 . [7].

2.3. Создание модели - демонстратора сечений конуса «Конические сечения: конус с цветным песком».

А теперь о самом процессе изготовления моего экспоната для музея занимательных наук САФУ и для проверки моей гипотезы в исследовании.

Вначале, я хотел распечатать конус на 3Д принтере, но он в итоге получался небольших размеров, и пришлось отказаться от этой идеи. Мой учитель математики Любовь Ивановна предложила сделать конус из защитного воротника для собак (фото 9), который изготовлен из прочного прозрачного

пластика.



фото 9

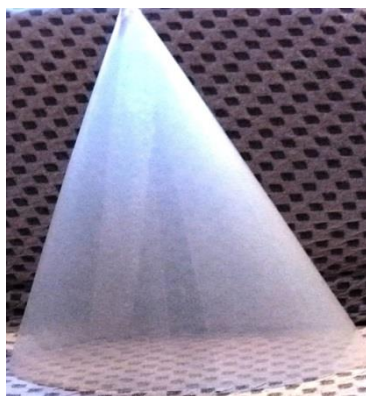


фото 10

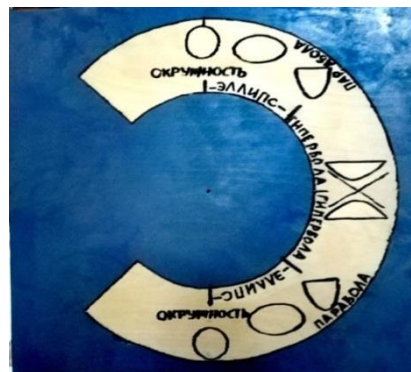


фото11

Изучив, как делать развертку конуса, я понял, что боковую поверхность конуса нужно прошивать леской, предварительно склеив прозрачным клеем, а



сверху промазав силиконом (фото 10). Далее пришлось обратиться за помощью к дедушке, который помог сделать стенд (фото 11), равносторонний треугольник, держатель для конуса и его основание из фанеры (фото 12). Все нужно было отшлифовать, а я не умею пока работать с такими инструментами.

Фото 12

Купил два флакона краски синего и зеленого цветов, девять саморезов, 4 шайбы, 4 гайки, винт 4X40 для вращения конуса, скобы для степлера, чтобы прикрепить основание конуса. Далее на стенде рассчитал, где нужно нарисовать кривые второго порядка: окружность, эллипс, параболу и гиперболу. Очень важно для получения нужного эффекта, чтобы объем песка был равен половине объема конуса. Поэтому рассчитав объем конуса, как произведение трети площади основания на высоту, заказал цветной песок на «OZON». Собрать

пришлось не одному, мне помогали и вот демонстратор сечений конуса готов (фото 13- 14).



Фото 13



фото 14

2.4. Результаты анкетирования (смотреть приложение 1)

III. Заключение

В ходе работы над проектом «Конические сечения: конус с цветным песком», я познакомился с различными видами конических сечений, научился их распознавать, находить их прототипы в окружающих нас предметах. Научился делать конус, немножко обучился столярному делу.

Эллипс и его частный случай — окружность, параболу и гиперболу легко получить экспериментально. На роль конуса вполне подойдёт, например, вафельный рожок для мороженого. Мысленно проводим одну его образующую и разрезаем рожок под разными углами к ней. Задача — сделать всего четыре попытки и получить на срезах все возможные конические сечения. Ещё проще провести опыт с карманным фонариком: в зависимости от его положения в пространстве конус света даст на стене комнаты пятна разной формы. Граница каждого пятна — одно из конических сечений. Поворачивая фонарик в вертикальной плоскости, вы увидите, как одна кривая сменяет другую: окружность вытягивается в эллипс, затем он превращается в параболу, а она, в свою очередь, в гиперболу.

Гипотеза исследования подтвердилась. Я выдвинул гипотезу, которая оказалась теоремой, не подозревая об этом. Посмотрев внимательно видео «Конические сечения: конус с водой» из фонда «Математические этюды»(etudes.ru), разработанным математическим институтом имени В.А.

Стеклова Российской Академии Наук, я создал модель-демонстратор сечений конуса «**Конические сечения: конус с цветным песком**». Я убедился в том, что **любое сечение кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, является эллипсом, гиперболой, параболой.** (Фото15)



Эллипс

парабола

гипербола Фото 15

IV. Список источников информации

- [1]. Л.С. Атанасян и др. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни — 10 изд., стер. — М.: Просвещение, 2022. — 287с., с. 94-96, с.129
- [2]. А.П. Юшкевич. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. — М.: Наука, 1970, с.130-138
- [3]. Н.В. Ефремов. Краткий курс аналитической геометрии. — М: Наука, 6-ое издание, 1967. — 267 с., с.229-236
- [4]. http://mathprofi.ru/giperbola_i_parabola.html
Гипербола и парабола. Теория и подробно разобранные практические задачи.
- [5]. etudes.ru Фонд «Математические этюды», разработанный математическим институтом им. В.А. Стеклова Российской Академии Наук.
- [6]. mathhelpplanet.com Эллипс: определение, свойства, построение.
- [7]. И.А. Данников, МЕХМАТ МГУ. Аналитическая геометрия. Лекции ученых, лекция 1, с. 9-12

V. Приложения

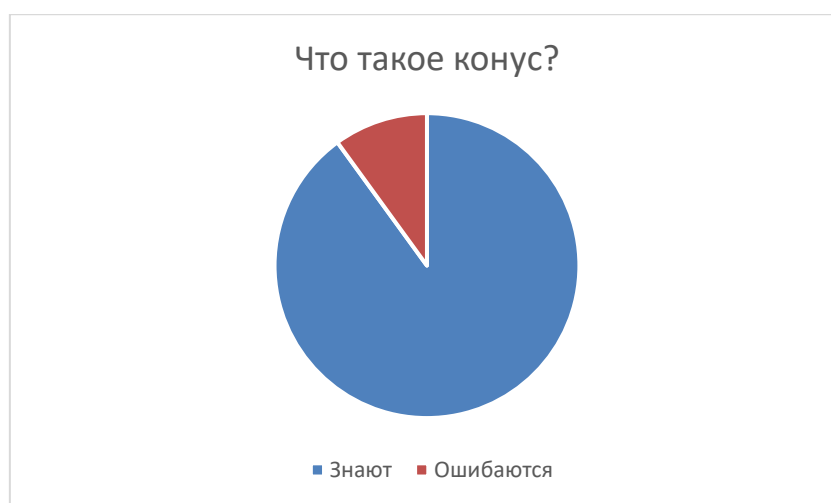
Анализ результатов анкетирования.

Я провел социологический опрос среди 11-х профильных классов: физмата, социально-экономического №1 и №2, инженерного и инженерно-технологического. Всего 108 человек. Было задано два вопроса:

1. Что такое конус?

2. Какие виды сечений конуса плоскостью вам известны?

При ответе на первый все респонденты дали правильный ответ. 90% знают, 10% -ошибаются.



А вот при ответе на второй вопрос выпускники хорошо знают два сечения конуса: осевое и круговое, то, что изучается на уроках геометрии. Про другие конические сечения (эллипс, парабола и гипербола) они в своем большинстве не слышали, так как на уроках это не изучалось. Тема «Сечения конической поверхности» не входит в программный материал, но ее можно выносить на элективные курсы.

Таким образом, анкетирование показало, что проект **«Конические сечения: конус с цветным песком»** является востребованным, так как с помощью модели-демонстратора сечений конуса можно наглядно на дополнительных уроках показать конические сечения в зависимости от угла между секущей плоскостью и осью конической поверхности.

