

Научно-исследовательская работа

Астрономия

ТОЧКИ ЛАГРАНЖА

Выполнили:

Глушанко Ульяна Егоровна

Обучающаяся 10 «М» класса

ГУО «Лицей БГУ», Беларусь, г. Минск

Шурпелёва Екатерина Николаевна

Обучающаяся 10 «М» класса

ГУО «Лицей БГУ», Беларусь, г. Минск

Руководитель:

Ивановна Полина Александровна

м.н.с Центра "Физика плазмы",

ГНУ "ИНСТИТУТ ФИЗИКИ им. Б. И.

Степанова НАН Беларуси"

Введение

Темп космических достижений определяется не только способностями современных ученых-физиков решать определенные задачи, важны еще и финансовые возможности страны, которая запускает космическую миссию. Желание расширить возможности таких миссий при низких затратах потребовало новых подходов к старой проблеме космических путешествий: «Современные проблемы требуют современных решений»¹. Многие недавние космические миссии имеют сложные и сильно «некеплеровские» орбиты, которые связаны с тонкой динамикой гравитационных проблем трех и N тел.

Для задачи трёх тел в 1912 году Карлом Зундманом было получено общее аналитическое решение в виде рядов. Хотя эти ряды и сходятся для любого момента времени и с любыми начальными условиями, но сходятся они крайне медленно. Из-за крайне медленной сходимости практическое использование рядов Зундмана невозможно. Также для задачи трёх тел Генрихом Брунсом и Анри Пуанкаре было показано, что её общее решение нельзя выразить через алгебраические или через однозначные трансцендентные функции координат и скоростей. На данный момент в общем виде задача N тел для $N > 3$ может быть решена только численно, причём даже для $N = 3$ ряды Зундмана даже при современном уровне развития вычислительной техники использовать практически невозможно (рис. 1) [1, 3, 9, 13].

В 1772 году математик Жозу Луи Лагранж вычислил в своем исследовании «Проблема трех тел», что гравитационное поле Земли должно нейтрализовать гравитационное притяжение самого большого объекта в Солнечной системе – Солнца – в пяти областях пространства – точках Лагранжа. Более точно точки Лагранжа представляют собой частный случай при решении так называемой *ограниченной* задачи трёх тел – когда орбиты всех тел являются круговыми и масса одного из них намного меньше массы любого из двух других [3, 9].

¹ Фраза-шутка, используемая на просторах интернета, для описания креативных подходов к решению проблемы.

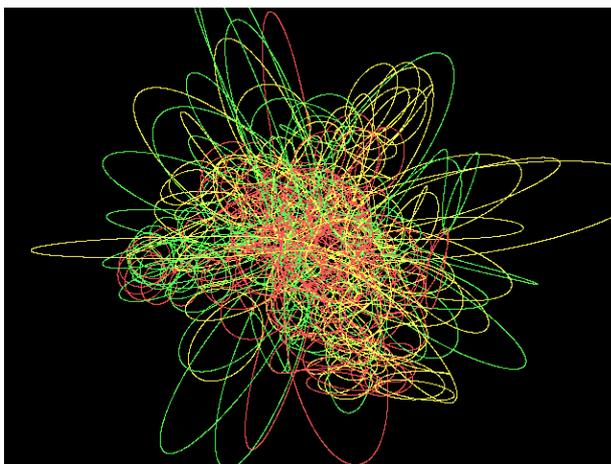


Рис. 1. Приблизительные траектории трёх одинаковых тел, находившихся в вершинах неравностороннего треугольника и обладавших нулевыми начальными скоростями

Основная часть

Определение движения трех тел, взаимно притягивающих друг друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними, называется *задачей трех тел*. Рассмотрим задачу трёх тел, где первое тело - тело большей массы, второе тело - тело меньшей массы, третье тело - тело, находящееся в одной из точек Лагранжа [1, 3, 9, 13].

Точки Лагранжа – точки, во вращающейся системе из двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействие никаких других сил кроме гравитационных, со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относительно этих тел. В этих точках гравитационные силы, действующие на малое тело, уравниваются силами инерции [1, 9].

Лагранж показал, что если третье тело обладает определенным значением начальной скорости, то конфигурация, которую образуют все три тела, всегда остается подобной самой себе, а движение всех тел происходит по коническим сечениям одинакового вида [1,3,9,13]. В итоге возможны следующие случаи:

1) три тела расположены на одной прямой и обращаются, оставаясь на ней, вокруг общего центра масс;

2) три тела расположены в вершинах равностороннего треугольника и обращаются вокруг общего центра масс так, что треугольник остается все время равносторонним.

Решение ограниченной задачи трех тел

Рассмотрим расположение точек Лагранжа более подробно (рис. 2).

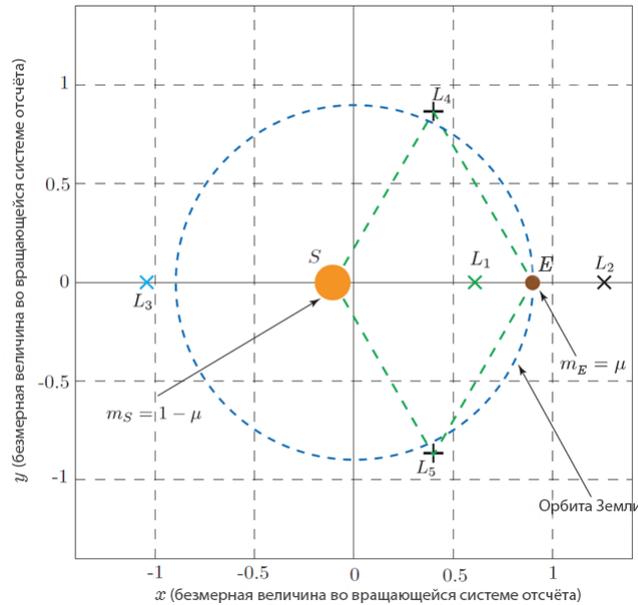


Рис. 2. Точки равновесия в задаче трёх тел для системы Земля-Солнце

Все точки Лагранжа лежат в плоскости орбит массивных тел и обозначаются заглавной латинской буквой L с числовым индексом от 1 до 5. Первые три точки расположены на линии, проходящей через оба массивных тела. Эти точки Лагранжа называются коллинеарными и обозначаются L_1 , L_2 и L_3 . Точки L_4 и L_5 называются *треугольными* или *троянскими*. Точки L_1 , L_2 , L_3 являются точками *неустойчивого* равновесия, в точках L_4 и L_5 равновесие *устойчивое* [1, 3, 9, 10, 13].

Объектами исследования стали системы: Солнце – планета, планета – спутник, Плутон – Харон, экзопланетарная система 2MASS J04414489+2301513 b (примечательна наименьшей звездной массой (звезда вокруг которой обращается планета – коричневый карлик) по сравнению со всеми известными экзопланетарными системами), а также двойная черная дыра GW150914 (именно от этой системы впервые были обнаружены гравитационные волны).

В данной работе мы исследовали динамику движения выбранных нами объектов при решении ограниченной задачи трех тел. Для постановки задачи мы выбрали систему из трех тел таким образом, чтобы объект массой M_2 обращался вокруг другого объекта массой M_1 (при чем $M_1 > M_2$) по круговой орбите (или очень близкой к круговой). Тогда пусть третье тело массой M_3 много меньшей, чем массы двух других объектов, движется в гравитационном поле двух других тел (для задачи, гравитационным полем третьего тела можно пренебречь, в виду его незначительности). Движение рассмотрим во вращающейся системе координат, чтобы тела с массами M_1 и M_2 оставались неподвижными в этой системе.

Запишем уравнения движения в плоскости. Если решать задачу «в лоб» и начать записывать уравнения движения в ненормированной и неинерциальной системе координат, то по итогу мы приходим к очень громоздким выражениям в большом количестве. Потому мы используем нормированные значения для расстояний и массы третьего тела. Для начала введем коэффициент, который будет зависеть от масс M_1 и M_2 :

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2}. \quad (1)$$

Далее нормируем расстояния между объектами таким образом, чтобы оно было равно 1, и тогда во вращающейся системе отсчета, нормированной на вращение с единичной угловой скоростью, два тела могут располагаться на оси X в точках $(-\mu, 0)$ и $(1 - \mu, 0)$. Положение третьего тела зададим координатами (x, y) во вращающейся системе отсчета. Массу третьего тела M_3 мы возьмем равной 1. Тогда кинетическая энергия этого третьего тела относительно инерциальной системы отсчета, но записанной в системе, вращающейся с единичной угловой скоростью, представляет собой следующее выражение:

$$K(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} [(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2]. \quad (2)$$

Теперь зададим расстояние от третьего тела до тела с массой M_1 как r_1 , до тела M_2 как r_2 . С учетом координат, получим:

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad (3)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}. \quad (4)$$

С учетом (1) – (4) запишем гравитационный потенциал энергии третьего тела:

$$U(x, y) = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}. \quad (5)$$

Лагранжиан третьего тела найдем как разницу кинетической энергии тела и его потенциальной энергии:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = K(x, y, \dot{x}, \dot{y}) - U(x, y). \quad (6)$$

Теперь уравнения движения можно получить, просто записав соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \quad (7)$$

где \bar{U} – эффективный потенциал,

$$\bar{U} = U - \frac{x^2 - y^2}{2}. \quad (8)$$

Выполнив преобразования Лежандра, мы получили энергию третьего тела:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \bar{U}(x, y). \quad (9)$$

Получается, что точки Лагранжа – это критические точки эффективного потенциала – 5 точек, и именно в этих точках поверхность является эквипотенциальной [9, 10].

Используя среду Wolfram Mathematica мы построили поверхность и изоповерхность эффективного потенциала, а также нашли численные значения координат точек Лагранжа вокруг рассматриваемых систем. Полученные результаты приведены в Приложении А. Для примера на рисунке 3 показана поверхность эффективного потенциала для системы Земля – Луна.

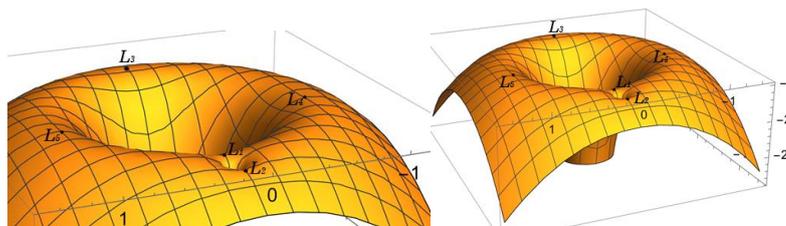


Рис. 3. Поверхность эффективного потенциала для системы Земля – Луна

Также мы изменили значения масс, таким образом, что $M_1 = 2 \cdot M_2$, получили следующую поверхность (рис. 4).

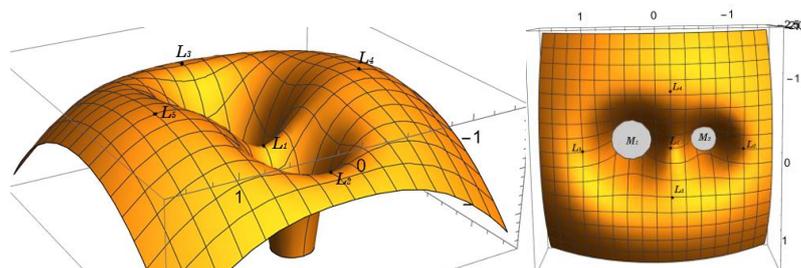


Рис. 4. Поверхность эффективного потенциала для системы масс M_1 и M_2 , где $M_1 = 2 \cdot M_2$

Таким образом, при данном уровне энергии E третье тело может двигаться только в области, заданной неравенством $E - \bar{U} \geq 0$; это называется *областью Хилла (Роша)* и получается пересечением графика эффективного потенциала с горизонтальной плоскостью (рис. 5) [9, 10].

В дальнейшем мы оставляем за собой перспективу развития этой темы, для более подробного исследования точек L_1 и L_2 , которые являются центрально-седловыми, и вокруг которых имеется целое семейство периодических орбит, которые называются *орбитами Лиссажу*. При движении по такой орбите спутник движется вокруг точки Лагранжа без включения двигателей, что является крайне выгодной орбитой [9]. В настоящее время все запускаемые белорусские спутники являются только геостационарными. В дальнейшем такое исследование для системы Земля-Луна можно было бы использовать для запуска белорусских спутников по орбите Лиссажу, что открыло бы для нашей страны новые перспективы – это подтверждает актуальность нашей работы.

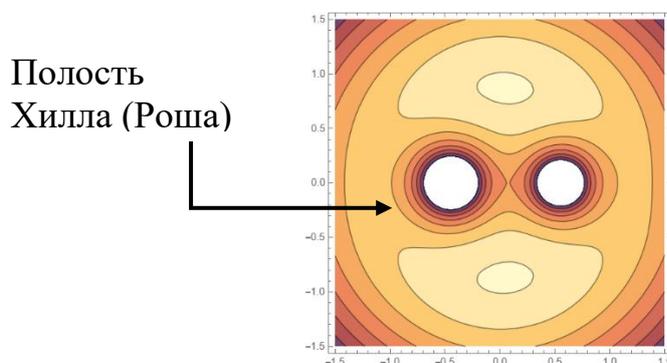


Рис. 5. Изоповерхность эффективного потенциала для двойной черной дыры GW150914

Далее приведем некоторые космические станции, которые используют орбиту Лиссажу для выполнений миссий, а также несколько запущенных спутников и обсерваторий, которые расположены в точках Лагранжа.

Космические аппараты, использующие орбиту Лиссажу

Genesis (Дженезис) – космический аппарат НАСА, предназначенный для сбора и доставки на Землю образцов солнечного ветра. Был запущен 8 августа 2001, вернулся на Землю 8 сентября 2004. Из-за ошибки при установке одного из датчиков ускорения приземление прошло нештатно — парашют не раскрылся, и капсула с образцами на высокой скорости врезалась в землю. Тем не менее после анализа обломков учёным удалось получить некоторое количество образцов. Миссия *Genesis* использовала уникальную орбиту, на проектирование которой ушло 3 года. После взлёта производилось единственное включение маршевых двигателей, которое выводило аппарат на орбиту Лиссажу (орбиту Ляпунова) вокруг точки Лагранжа L_1 системы Земля-Солнце. В течение трёх лет аппарат совершил 4 оборота по этой орбите, не включая даже корректирующие двигатели, чтобы не загрязнять образцы. Затем аппарат, в соответствии с выбранной траекторией и без включения маршевого двигателя, совершил пятимесячный перелёт дальностью более 3 миллионов километров к точке L_2 , облетел её и при помощи гравитации Луны вышел на посадочную траекторию [5].

Advanced Composition Explorer (ACE or Explorer 71) (Расширенный обозреватель композиций) спутник был запущен 25 августа 1997 года. Его задача – определение элементного и изотопного состава различных образцов исходного материала (межзвездных облаков), в следствии сжатия которого в ядрах звезд начинаются термоядерные реакции. Эти наблюдения были использованы для:

- Создания изотопного состава Солнца на основе выборки солнечного материала.
- Определить элементный и изотопный состав короны со значительно большей точностью.

- Установить характер изотопных различий между галактическими космическими лучами и веществом Солнечной системы.
- Измерение элементного и изотопного состава межзвездных и межпланетных ионов захвата.
- Определить изотопный состав "аномальной компоненты космических лучей", который представляет собой образец местной межзвездной среды [7].

Космические аппараты, расположенные в точке L_1

L_1 в системе Солнце-Земля – идеальное место для размещения космической обсерватории для наблюдения Солнца, которое в этом месте никогда не перекрывается ни Землёй, ни Луной. Также солнечный ветер, достигает L_1 примерно за час до того, как достигнет Земли. Например, в точке L_1 располагается *International Sun/Earth Explorer 3 (ISEE-3) (Международный исследователь Солнца/Земли 3)*. Его первоначальная миссия заключалась в исследовании солнечно-земных связей на внешних границах магнитосферы Земли (рис. 7); подробном изучении структуры солнечного ветра вблизи Земли и ударной волны, а также формы взаимодействия между солнечным ветром и магнитосферой Земли; продолжении исследования космических лучей и солнечного излучения в межпланетной области около 1 а. е. [5].

После завершения своей первоначальной миссии 10 июня 1982 года ISEE-3 продолжал работу. Он был переименован в «Международный исследователь комет» (ICE). Основной научной целью ICE было изучение взаимодействия солнечного ветра с кометной атмосферой. В 1984 году аппарат вышел на гелиоцентрическую орбиту для перехвата первой цели миссии — кометы Джакобини — Циннера. Комета Джакобини — Циннера - короткопериодическая комета из семейства Юпитера. Диффузный объект 10,5—11,0^m звёздной величины. Комета обладает довольно коротким периодом обращения вокруг Солнца — чуть более 6,4 года [5].

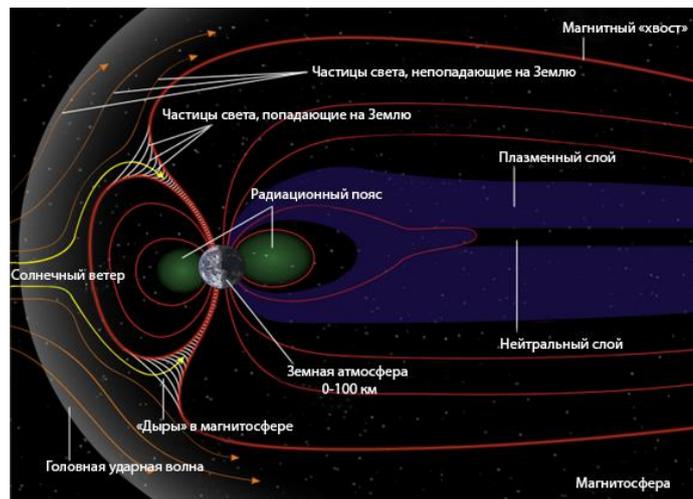


Рис. 7. Магнитосфера Земли

11 сентября 1985 года аппарат ИСЕ прошёл сквозь хвост кометы. И следующей целью была комета Галлея – яркая (хорошо видимая невооруженным глазом) короткопериодическая комета, возвращающаяся к Солнцу каждые 75—76 лет. Является первой кометой, для которой определили эллиптическую орбиту и установили периодичность возвращений. В конце марта 1986 года ИСЕ пролетел сквозь хвост кометы на расстоянии 28 миллионов километров от ядра [5].

После выполнения основных задач второй миссии аппарат продолжил изучение излучения Солнца. 5 мая 1997 года НАСА официально завершило миссию ИСЕ, отключив все научные приборы и оставив только радионесущий сигнал (сигнал, выполняющий роль переносчика информации) для телеметрии (набор методов сбора информации и измерения параметров, позволяющих отслеживать необходимые данные об объектах, которые находятся непосредственно рядом либо удаленно) [5].

SOHO (Solar and Heliospheric Observatory – Солнечная и гелиосферная обсерватория) — космический аппарат для наблюдения за Солнцем. Совместный проект ЕКА и НАСА. Был запущен 2 декабря 1995 года, выведен в точку Лагранжа L_1 системы Земля—Солнце и приступил к работе в мае 1996 года. Основной задачей аппарата является изучение Солнца. Приборы аппарата в автоматическом режиме собирают информацию о состоянии солнечной

атмосферы, глубинных слоях Солнца, солнечном ветре и об активности солнечной короны [5].

Точка L_1 в системе Земля-Луна

GGS WIND — космический аппарат, запущенный в рамках международной Глобальной геокосмической программы (GGS от англ. Global Geospace Science Program), предназначенный для изучения солнечного ветра («винд», от (англ. wind, букв. ветер) и его взаимодействия с поверхностью Земли, обеспечения полной информацией о плазме, энергичных частицах и магнитном поле для магнитосферных и ионосферных исследований [5].

Deep Space Climate Observatory (DSCOVR) (*Глубокая космическая климатическая обсерватория*) – предназначен для получения изображений освещенной Солнцем Земли в 10 диапазонах длин волн и мониторинга полного отраженного излучения [5].

Космические аппараты, расположенные в точке L_2

Эффект, подобный тому, что вызывает L_1 , возникает и на стороне Земли за ее орбитой. L_2 расположена в 1,5 миллионах километров прямо "за" Землей. L_2 - отличное место для наблюдения за большей частью Вселенной. Космическому аппарату здесь не нужно вращаться вокруг Земли, поэтому он избавлен от необходимости входить и выходить из тени нашей планеты, нагреваться и остывать, искажая обзор [5, 11]. У ЕКА есть ряд миссий, которые уже используют или будут использовать этот регион:

Миссия *Planck* (*Планк*) преследовала широкий спектр научных целей, включая:

- Обнаружение с высоким разрешением полной интенсивности и поляризации анизотропии изначального реликтового излучения.
- Создание каталога скоплений галактик с помощью эффекта Сюняева-Зельдовича. Эффект Сюняева -Зельдовича – изменение интенсивности радиоизлучения реликтового фона из-за обратного эффекта Комптона на горячих электронах межзвёздного и межгалактического газа [5].

- Наблюдения гравитационного линзирования (гравитационная линза – массивное тело, изменяющее своим гравитационным полем направление распространения электромагнитного излучения, подобно тому как обычная линза изменяет направление светового луча) реликтового излучения, а также интегрального эффекта Сакса-Вольфа. Эффект Сакса-Вольфа — влияние гравитационного красного смещения от крупномасштабных неоднородностей гравитационного поля Вселенной на фотоны реликтового излучения. В результате спектр реликтового излучения становится анизотропным [5].

- Наблюдения ярких внегалактических радио (активные галактические ядра) и инфракрасных (пылевые галактики) источников.

- Наблюдения Млечного Пути, включая межзвездную среду, распределение синхротронного излучения и измерения галактического магнитного поля.

- Исследования Солнечной системы, включая планеты, астероиды, кометы.

В период с сентября 2009 по ноябрь 2010 года «Планк» успешно закончил основную часть своей исследовательской миссии, перейдя к дополнительной, завершившейся 23 октября 2013 года [5].

James Webb Space Telescope (Космический телескоп «Джеймс Уэбб») – перед космическим телескопом стоят четыре основные задачи [8]:

- Поиск света от первых звезд и галактик, образовавшихся во Вселенной после Большого взрыва;

- Изучение формирования и эволюции галактик;

- Понять процесс звездообразования и формирования планет;

- Изучить планетарные системы и происхождение жизни;

Космические аппараты, расположенные в точке L_4 и L_5

В сентябре-октябре 2009 года два аппарата *STEREO* совершили транзит через точки L_4 и L_5 . *Hayabusa2* прошел вблизи L_5 весной 2017 года и 18 апреля 2018 года сделал снимки окрестностей в поисках земных троянцев [3, 5, 11].

Заключение

В данной работе были исследованы поверхности и изоповерхности эффективного потенциала, точки Лагранжа для систем Солнце – Планета, планета – спутник, Плутон – Харон, экзопланетарной системы 2MASS J04414489+2301513 b, и двойной системы черных дыр GW150914. Продемонстрированы способы решения ограниченной задачи трех тел. Выполнен обзор на существующие решения задачи N-тел, а также задач при $N = 3$. Изучены космические миссии, с запуском космических аппаратов в точках Лагранжа, либо обращающиеся по траектории Лиссажу. Было обнаружено, что многие системы обладают крайне неустойчивыми точками Лагранжа, так как масса менее массивного тела в системе слишком мала для её устойчивости. Перспектива развития этой темы заключается в исследовании более энергетически выгодных орбит для запуска космических аппаратов в том числе белорусских. При движении по орбите Лиссажу спутник движется вокруг точки Лагранжа без включения двигателей, что является крайне выгодной орбитой. В настоящее время все запускаемые белорусские спутники являются только геостационарными. Эффективность данной орбиты продемонстрирована другими космическими миссиями. Найденные численные значения координат точек либрации будут использованы в дальнейшем при разработке траектории Лиссажу, что обуславливает практическое применение данных исследований.

Список литературы

1. Зигель, К. Л. Лекции по небесной механике. Архивная копия от 2 февраля 2021 на Wayback Machine/К. Л. Зигель – М.: ИЛ, 1959. – 300 с.
2. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учебное пособие/Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 4–е изд. – М., исп. – М. : Наука Гл. Ред. Физ.–мат. Лит., 1988.–216 с.
3. Берри, А. Краткая история астрономии/ А. Берри – 2–е изд. – М.–Л.: ГТТИ, 1946. – 363 с.
4. Дубошин, Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы/ Г. Н. Дубошин – М.: Наука, 1975. – 800 с.
5. Siddiqi, A. A. Beyond Earth: A Chronicle of Deep Space Exploration, 1958–2016 The NASA history series (second ed.)/ A. A. Siddiqi – 2nd ed. – Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration, Office of Communications, 2018. – 374 с.
6. Rovey, J. Propulsion and Energy: Electric Propulsion (Year in Review). – Aerospace America, 2009. – 44 с.
7. Stone, E. C. The Advanced Composition Explorer / E. C. Stone, A. M. Frandsen, R. A. Mewaldt; /Kluwer Academic Publishers. – Netherlands, 1998.–23 с.
8. Greenhouse, Matt. The James Webb Space Telescope Mission//JWST Project Office. NASA Goddard Space Flight Center, 2016. – 36 с.
9. Koon, W. S. Dynamical Systems, the Three–Body Problem and Space Mission Design/ W. S. Koon [et al]., 2005. – 315 с.
10. Chobotov, V. A. Orbital Mechanics/ V. A. Chobotov – American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999. – 458 с.
11. Lissauer, J. J. Solar System Dynamics: Regular and Chaotic Motion. Encyclopedia of the Solar System / J. J. Lissauer, C. D. Murray, 2014. – 61с.
12. Аскерова, А.А. Точки Лагранжа в системе Марс–Фобос/А.А. Аскерова, В.А. Столбова // Политехнический молодежный журнал. – 2018. – №10. С. 1–7.
13. Маркеев А.П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике. Москва, Наука, 1978. – 312 с.