Научно - исследовательская работа

Математика

ВОЛШЕБНЫЕ ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Выполнила:

Романова Виктория Анатольевна

ученица 8В класса

МБОУ «СОШ» №6 ЕМР РТ, Россия, г. Елабуга

Руководитель

Низамиева Лада Вадимовна

учитель математики и физики

МБОУ «СОШ» №6 ЕМР РТ, Россия, г. Елабуга

Введение

Формулы сокращенного умножения — это алгебраические тождества, которые используются для упрощенного решения типичных, часто встречающихся многочленов. Знакомство с сокращенным умножением начинается впервые в седьмом классе.

Формулы сокращенного умножения (далее ФСУ) применяются для упрощения многочленов в алгебре. Они позволяют уменьшить количество слагаемых в многочлене и представить его в более компактном виде.

ФСУ позволяют решать такие задачи, как:

1. Умножение многочленов.
2. Решение уравнений и неравенств многочленов.
3. Решение геометрических задач.
4. Расчет коэффициентов многочленов.
5. Решение задач в математической статистике и т.д.

Также ФСУ могут применяться и в других областях математики, таких как алгебра, геометрия, комбинаторика, физика и т.д.

Проблема исследования – существует множества формул сокращенного умножения, которые не изучаются в школьном курсе математики. Тем не менее они помогают рационально выполнять некоторые задания.

Актуальность исследования состоит в том, чтобы узнать, какие формулы сокращенного умножения существуют и выяснить степень их важности, а также рассмотреть задачи с формулами сокращенного умножения, встречающиеся в заданиях ОГЭ. ФСУ – очень важная тема в курсе математики, так как они применяются на протяжении всего периода обучения математике и используются при умножении многочленов, упрощении алгебраических выражений, решении уравнений и систем уравнений.

Цель исследования – изучить историю возникновения формул сокращенного умножения, рассмотреть вопрос о существовании других формул, которые не затрагиваются в школьной программе математики.

Задачи исследования:

1. Собрать сведения об истории создания ФСУ.
2. Рассмотреть формулы сокращенного умножения школьного курса алгебры.
3. Познакомиться с новыми формулами сокращенного умножения.
4. Рассмотреть применение ФСУ при решении вычислительных примеров и задач.
5. Обобщить сведения.

Объект исследования – формулы сокращенного умножения.

Предмет исследования – использование ФСУ при решении задач школьного курса математики и ОГЭ.

Гипотеза исследования – существует множества формул ФСУ, не изучаемых в школьной программе, помогающих обоснованно выполнять задания.

§1. История возникновения формул сокращенного умножения

Первые правила сокращенного умножения были известны еще задолго до нашего времени, а именно 4000 лет назад. Первыми о них узнали греки, вавилоняне, а также другие нации того времени[8].

Ранее в Греции были известные философы, ученые, математики, которые посвятили свою жизнь изучению формул и многочленов. С начала VI века до нашей эры у древних математиков появляются общие сведения и представления о формировании многочленов, использовании терминов и правил, которые вывел древний ученый-математик Пифагор.

В то время было заведено все математические выражения трактовать в геометрическом виде. Также у греков величины позиционировались не переменными, а простой прямой. Допустим возьмем формулу квадрата суммы $(a + b)^2$ во второй книге Евклида «Начала» (рис. 1) базировалось так: «Если прямая линия как-либо прерывается, то квадрат на всей прямой равен квадратам на отрезках вместе с дважды взятым прямоугольником, заключенным между отрезками» [6].

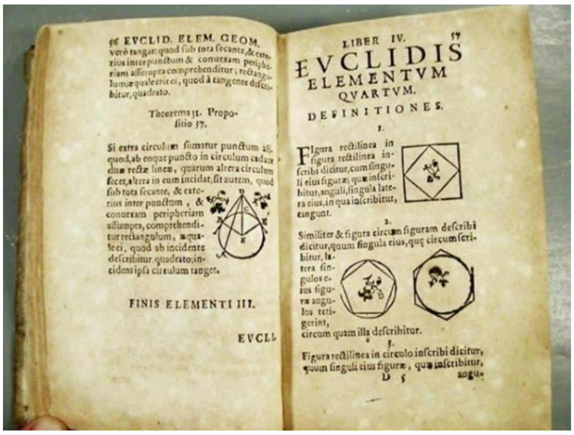

Рис 1. Изображение книги «Начало»

Также многими было замечено, что некоторые многочлены можно умножить быстрее, чем все остальные. Математиками еще до нашей эры геометрическим способом были выведены некоторые формулы, которые получили название ФСУ – формулы сокращенного умножения.

Первый математик, который пренебрег геометрическим методом был Диофант Александрийский, проживавший в III веке до нашей эры (рис. 2). В своей книге «Арифметика» Диофант исследовал формулы сокращенного умножения в арифметическом плане.

Рис 2. Изображение Диофанта Александрийского

В XVI веке французский математик Франсуа Виет (рис. 3) ввел переменные для обозначения произведений с помощью букв. Он использовал первые буквы латинского алфавита для обозначения неизвестных величин и букву «x» и для известных величин.

Рис 3. Изображение Франсуа Виета

Рене Декарт – ученый-математик благодаря которому формулы сокращенного умножения приобрели современный вид (рис. 4). Он сконструировал алгебраический метод решения данных выражений и учредил символы умножения и деления. Рене Декарт применил математику к анализу движения и, создавая новые переменные величины, выявил соответствие между геометрическими представлениями и алгебраическими уравнениями. Также Рене Декарт установил общепринятые знаки для переменных (x, y, z…), и для буквенных коэффициентов (a, b, c…)

Рис 4. Изображение Рене Декарта

§2. ФСУ школьного курса математики

Формулы сокращенного умножения – это алгебраические тождества, которые используются для упрощенного решения типичных часто встречающихся многочленов. Формулы позволяют возвести в степень сложные выражения быстрее в ряде случаев [1]. Слово «сокращенное» в названии объясняется тем, что при использовании формул частично пропускаются вычислении.

В школьном курсе математики есть несколько основных ФСУ:

Квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Разность квадратов: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Сумма кубов: $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Разность кубов: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Если поменять местами левую и правую части формул, то получится разложение на множители. Обратная запись ФСУ отлично годится, чтобы раскладывать на множители многочлены, сокращать алгебраические дроби и решать самые разные примеры. Формулы сокращенного умножения также можно и доказать. Нужно всего лишь раскрыть скобки [10].

1 способ (Алгебраическое доказательство формул сокращенного умножения):

Рассмотрим на первой формуле – квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

1 этап: возведем $a + b$ во вторую степень, перемножим их: $(a + b)(a + b)$

2 этап: раскрываем скобки: $a^2 + ab + ab + b^2$

3 этап: упрощаем выражение: $a^2 + 2ab + b^2$.

2 способ (Геометрическое доказательство формул сокращенного умножения):

Первым с доказательством этой формулы столкнулся древнегреческий ученый Евклид. Так как в те времена не было букв, он пользовался геометрическим способом доказательства формулы [2]. Рассмотрим доказательство на формуле квадрата суммы. Построим квадрат со стороной $a + b$, проведя внутри него прямые, соединяющие границы отрезков a и b на каждой из сторон (рис. 5).

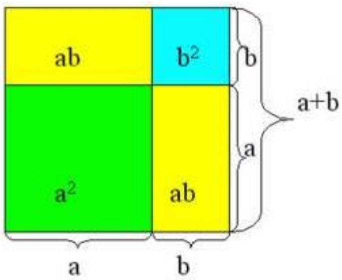

Рис 5. Изображение геометрического доказательства ФСУ

Площадь квадрата со стороной $a + b$ состоит из площади квадрата со стороной a, площади квадрата со стороной b и двух прямоугольников с площади ab. То есть она равна $a^2 + b^2 + 2ab$, или $a^2 + 2ab + b^2$.

§3. Возведение в квадрат суммы нескольких слагаемых

Все школьники привыкли к стандартному виду формулы квадрата суммы, а именно $(a + b)^2$. Квадрат суммы позволяет быстро писать результат возведения суммы двух слагаемых в квадрат. Полученное равенство – тождество, его называют формулой квадратного двучлена [6].

Но существуют и квадрат суммы с тремя и более переменными.

Рассмотрим выражение ($a^2 + b^2 + c^2$). Квадрат суммы нескольких слагаемых равен сумме квадратов всех слагаемых и удвоенных попарных произведений этих слагаемых: ($a^2 + b^2 + c^2$) = $(a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. Квадрат суммы нескольких слагаемых является важным понятием в математике и широко используется в различных областях, таких как алгебра, геометрия и физика [9]. Также в геометрии эта формула выглядит так:

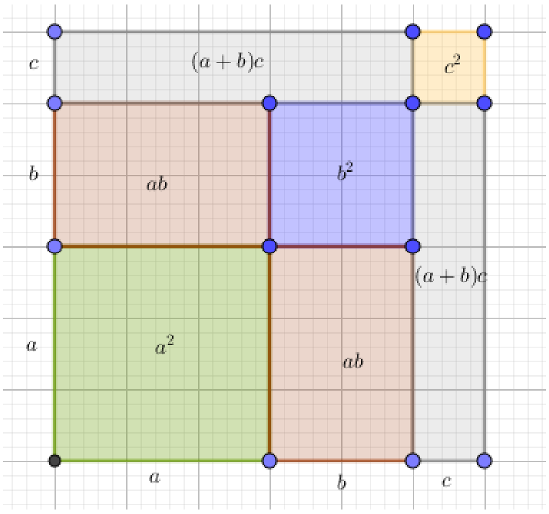

Рис 6. Изображение геометрического доказательства квадрата суммы с тремя переменными

Разберем пример: $(2a + x + 3c)^2$. Используя вышеуказанное равенство, получаем новое выражение и раскрываем скобки:

$(2a + x + 3c)^2 = (2a)^2 + x^2 + (3c)^2 + 2(2ax) + 2(2a^3c) + 2(x^3c) = 4a^2 + x^2 + 9c^2 + 4ax + 12ac + 6cx$.

Рассмотрим известные нам формулы сокращенного умножения:

1) $(a + b)^0 = 1$
2) $(a + b)^1 = a + b$
3) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Чтобы возвести сумму двух слагаемых, нужно рассмотреть формулы, которые находятся выше. Допустим, если бы мы не знали сумму кубов, мы бы могли расписать эту формулу таким образом: $(a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ [7].

Абсолютно также можно расписать с четвертой степенью, представив ее как произведение двух формул квадрата суммы: $(a + b)^4 = (a + b)^2(a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Можно заметить, что все коэффициенты, полученные в результате умножения, были симметричны. Данная закономерность среди коэффициентов многочлена называется «Треугольник Паскаля». Строится «Треугольник Паскаля» следующим образом. В вершине треугольника пишут 1. Единица соответствует выражению поскольку любое число, возведённое в нулевую степень, даёт единицу. Достраивая треугольник, ниже пишем ещё по единице. Это коэффициенты разложения того же двучлена, возведённого в первую степень. Стороны треугольника образуют единицы, а между ними — сумма двух единичек, находящихся сверху, то есть 2. Это и есть коэффициенты трёхчлена квадрат суммы [7].

Следующий ряд, как и предыдущий, начинается и заканчивается единицами, а между ними — суммы цифр, находящихся сверху: 1, 3, 3, 1. Мы получили коэффициенты разложения «куба суммы». Ряд коэффициентов двучлена четвёртой степени составят 1, 4, 6, 4, 1 и так далее.

Построим «Треугольник Паскаля»:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Но кроме закономерности среди коэффициентов прослеживается так же замечательная закономерность и среди степеней получившегося многочлена. Оказывается, степени входящих одночленов образуются следующим образом: степень первого слагаемого, начиная с большей, с каждым разом уменьшается на единицу, а степень второго слагаемого наоборот увеличивается от нулевой до наибольшей [8].

Рис 7. Изображение Паскаля

§4. Использование формул сокращенного умножения в заданиях ОГЭ

В ОГЭ встречаются множество заданий, среди них встречаются и задания с формулами сокращенного умножения. Разберем 5 примеров с ФСУ из 9 задания ОГЭ:

1. $(\sqrt{11} + 3)^2 - 6\sqrt{11} = 11 + 6\sqrt{11} + 9 - 6\sqrt{11} = 11 + 9 = 20$
2. $(x + 10)^2 = (5 - x)^2$

$x^2 + 20x + 100 = 25 - 10x + x^2$

$x^2 + 20x + 10x - x^2 = 25 - 100$

$30x = -75$

$x = -\frac{75}{30} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$

3. $24ab + 2(-2a + 3b)^2 = 24ab + 2(4a^2 - 12ab + 9b^2) = 24ab + 8a^2 - 24ab + 18b^2 = 8a^2 + 18b^2$
4. $(3x + 7)^2 - (3x - 7)^2 = 9x^2 + 42x + 49 - (9x^2 - 42x + 49) = 9x^2 + 42x + 49 - 9x^2 + 42x - 49 = 84x$
5. $(\sqrt{18} + \sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = (18 + 2\sqrt{36} + 2) \times \sqrt{2} = 18\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$

Рассмотрим 5 примеров с формулами сокращенного умножения из 20 задания ОГЭ:

1. $(x – 4)^2 + (x + 9)^2 = 2x^2$

$x^2 – 8x + 16 + x^2 + 18ч + 81 = 2x^2$

$2x^2 + 10x + 97 = 2x^2$

$10x + 97 = 0$

$x = -97 : 10$

$x = -9,7$

2. $\frac{6}{a-1} - \frac{10}{(a-1)2} \times \frac{(a-1)(a+1)}{10} - \frac{2a+2}{a-1} = \frac{6}{a-1} - \frac{1}{(a-1)} \times \frac{(a+1)}{1} - \frac{2a+2}{a-1} = \frac{6}{a-1} - \frac{a+1}{(a-1)} - \frac{2a+2}{a-1} = \frac{6-a-1-2a-2}{a-1} = \frac{3-3a}{a-1} = \frac{3(1-a)}{a-1} = -3$

3. $(x – 3)^2 – (x + 2)^2 = 4$

$x^2 – 6x + 9 – (x^2 + 4x + 4) = 4$

$x^2 – 6x + 9 –x^2 - 4x - 4 = 4$

$-10x + 5 = 4$

$-10x = -1$

$x = \frac{1}{10} = 0,1$

4. $\frac{x+9}{x-3} - \frac{6}{(x-3)(x+3)} \times \frac{(x+3)2}{6} - \frac{3x-3}{x-3} = \frac{x+9}{x-3} - \frac{x+3}{x-3} - \frac{3x-3}{x-3} = \frac{x+9-x-3-3x+3}{x-3} = \frac{9-3x}{x-3} = \frac{3(3-x)}{x-3} = -3$

5. $(x + 6)^2 - (4 – x)^2 = 7x$

$x^2 + 12x + 36 - 16 + 8x - x^2 = 7x$

$20x + 20 – 7x = 0$

$13x = -20$

$x = -\frac{20}{13} = -1\frac{7}{13}$

Заключение

Формулы сокращенного умножения играют ключевую роль в математике. ФСУ представляют собой простой способ записи умножения чисел. Примеры ФСУ встречаются не только в школьном курсе математики, а также в заданиях ОГЭ.

Первые правила ФСУ были известны еще 4000 лет назад. В древней Греции было заведено записывать формулы сокращенного умножения геометрическим способом. Диофант Александрийский – первый математик, который исследовал формулы сокращенного умножения в арифметическом плане. Также свой вклад внесли Франсуа Виет и Рене Декарт. Виет ввел переменные для обозначения произведений с помощью букв. Рене Декарт сконструировал алгебраический метод решения данных выражений и учредил символы умножения и деления.

В исследовательской работе были рассмотрены формулы сокращенного умножения школьного курса, геометрическое доказательство формул сокращенного умножения. Были изучены ФСУ, которые не изучаются в школьном курсе математики. Так мы узнали, как возводить сумму квадратов в четвертую, пятую, шесту и седьмую степени. При этом была выявлена закономерность – коэффициенты, полученные в результате умножения, были симметричны. Данная закономерность в математике называется «Треугольник Паскаля», разобраны задания 9 и 20 из ОГЭ по математике.

Таким образом, можно сделать вывод, о том, что формулы сокращенного умножения – это легкий способ записывать умножение чисел. Также ФСУ очень важная тема, которая может пригодиться при решении примеров, задач по математике. Благодаря знаниям формул можно легко решить вычислительные примеры и уравнения.

Список литературы

1. Атанасян Л.С., Геометрия, Москва «Просвещение», 2011 г.
2. Виленкин Н.Я., Математика. 8 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. 28-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2011 г.
3. Выгодский М.Я., Справочник по элементарной математике, Москва «Аст», 2006 г.
4. Гончарова Л.В., Предметные недели в школе. Математика / Л.В. Гончарова. – В.: Учитель, 2004 г.
5. Депман И.Я., Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики. - Москва «Просвещение», 1999 г.
6. Жохов В.И., Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Алгебра 7 класс, Москва «Просвещение», 2013 г.
7. Жохов В. И., Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Алгебра 8 класс, Москва «Просвещение», 2015 г.
8. Савин А.П., Станцо В.В., Котова А.Ю., Я познаю мир. Математика. Детская энциклопедия. Москва «АСТ», 2005 г.
9. С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра 7; М.: «Просвещение», 2008 г.
10. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1985 г.