Муниципальное общеобразовательное автономное учреждение «Средняя общеобразовательная школа №12» города Калуги

Решение олимпиадных задач на переливание

Выполнил**: Иван Комонов**
учащийся 9 «А»класса МБОУ «СОШ № 12» г.Калуги
Руководитель: **Ирина Андреевна Фисенко**
учитель математики МБОУ «СОШ №12»

Калуга, 2022

Оглавление.

1. Введение.

Решить задачу по математике - это творческий и увлекающий процесс! Среди возможных вариантов решений выбрать более простое и красивое - разве это не заманчиво? Недаром поиск неординарного решения какой-либо задачи стал увлекательным процессом с давних времёни и продолжается по сей день. Я тоже люблю решать нестандартные задачи и находить наиболее «красивое» её решение. Это очень увлекательно.

Тема данной работы была выбрана в связи с тем, что, изучая дополнительный материал по математике, довольно часто можно встретить задачи на переливание жидкости, которые решаются однообразно методом подбора. При решении занимательных задач из различных математических сборников возникла *гипотеза*: возможно существуют и другие методы решения задач на переливание.

Целью данной работы является нахождение рационального способа решения алгебраических задач на переливание жидкости.

Задачи:

- ✓ ***Выявить, какие существуют способы решения подобных задач;***
- ✓ ***Изучить эти методы.***
- ✓ ***Составить алгоритмы решения задач с помощью этих методов.***
- ✓ ***Понять при каких условиях решаются эти задачи.***

Объектом исследования являются методы математического бильярда и трилинейных координат, их возможность и эффективность применения.

Предметом исследования является применение методов при решении задач занимательного и олимпиадного характера.

Результаты данной работы могут быть использованы на уроках алгебры и на занятиях математических кружков.

2. Метод таблиц.

В задачах на переливания требуется указать последовательность действий, при которой осуществляется требуемое переливание и выполнены все условия задачи. Если не сказано ничего другого, считается, что

- все сосуды без делений
- нельзя переливать жидкости "на глаз"
- невозможно ниоткуда добавлять жидкости и никуда сливать.

Мы можем точно сказать, сколько жидкости в сосуде, только в следующих случаях.

1) знаем, что сосуд пуст,
2) знаем, что сосуд полон, а в задаче дана его вместимость,
3) в задаче дано, сколько жидкости в сосуде, а переливания с использованием этого сосуда не проводились
4) в переливании участвовали два сосуда, в каждом из которых известно, сколько было жидкости, и после переливания вся жидкость поместилась в один из них
5) в переливании участвовали два сосуда, в каждом из которых известно, сколько было жидкости, известна вместимость того сосуда, в который переливали, и известно, что вся жидкость в него не поместилась: мы можем найти, сколько ее осталось в другом сосуде

Приведем типичные задачи на переливание.

Задача №1.

Имеется три сосуда без делений объемами 4 л, 5 л, 6 л, кран с водой, раковина и 4 л сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли, с помощью переливаний получить 8 л смеси воды с сиропом, так чтобы в каждом сосуде воды и сиропа было поровну?

Решение.

Строю таблицу.

4-литровый	4сироп	0	0	4вод	0	2вод	2в+2с	2в+2с	0	2с+2в

сосуд										
5-литровый сосуд	0	4сироп	4сир	4сир	4сир	4сир	2сир	0	2в+2с	2с+2в
6-литровый сосуд	0	0	6вода	2вод	2вод	0	0	2сироп	2сироп	0

3. Математический бильярд

Представьте себе горизонтальный бильярдный стол произвольной формы, но без луз. По этому столу без трения движется точечный шар, абсолютно упруго отражаясь от бортов стола. Спрашивается, какой может быть траектория этого шарика? Поиски ответа на этот вопрос и послужили появлению теории математического бильярда.

Идея метода:

1. Нарисовать бильярдный стол.
2. Интерпретировать действия движениями бильярдного шара.
3. **3.** Фиксирование состояния в отдельной таблице.

Преимущества метода:

- Наглядность.
- Привлекательность идеи.
- Возможность обобщить метод на широкий класс задач.

Задача № 2

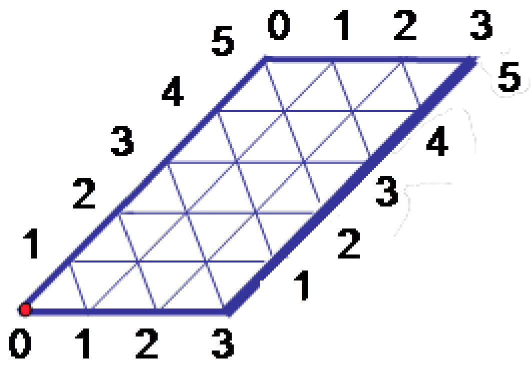
В фильме "Крепкий орешек 3: Возмездие", чтобы обезвредить бомбу Брюсу Уиллису необходимо было решить головоломку с переливанием.

До взрыва бомбы остается 2 минуты... В распоряжении у него 5-ти литровая и 3-х литровая бутылки и фонтан с водой. Чтобы обезвредить бомбу нужно положить на весы ровно 4 литра воды (4 кг), если больше или меньше, то бомба взорвется.

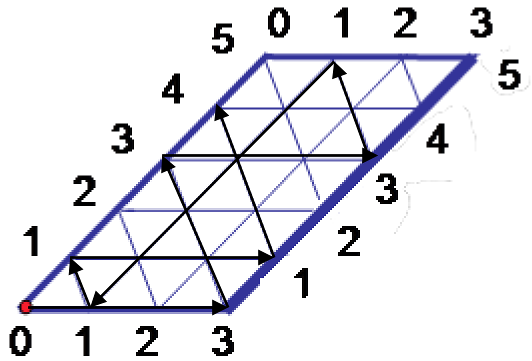
Какие переливания нужно совершить Брюсу Уиллису, чтобы обезвредить бомбу?

Решение.

1. *Строю параллелограмм и отмечаю на нём точки. Соединяю линиями.*



2. *Двигаю шар по траектории.*



5-лиитровый сосуд	3	0	3	5	0	1	1	4
3-литровый сосуд	0	3	3	1	1	0	3	0

3.1. Условие разрешимости задач

Если объемы двух меньших сосудов не имеют общего делителя (т. е. взаимно просты), а объем третьего сосуда больше или равен сумме объемов двух меньших, то с помощью этих трех сосудов можно отмерить любое целое число литров, начиная с 1 литра и кончая объемом среднего сосуда.

Имея, например, сосуды вместимостью 15, 16 и 31 литр, вы сумеете отмерить любое количество воды от 1 до 16 литров.

Такая процедура невозможна, если объемы двух меньших сосудов имеют общий делитель. Так как в этом случае шар будет двигаться по одной и той же траектории.

Когда объем большего сосуда меньше суммы объемов двух других, возникают новые ограничения. Если, например, объемы сосудов равны 7, 9 и 12 литрам, то у ромбического стола надо отсечь нижний правый угол. (Рис. 5)Тогда шар сможет попасть в любую точку от 1 до 9, за исключением точки 6. Несмотря на то, что 7 и 9 взаимно просты, отмерить 6 литров воды оказывается невозможным из-за того, что самый большой сосуд имеет слишком маленький объем.
Отметим, что обобщение указанного метода на случай четырех сосудов сводится к движению бильярдного шара в объемной (тетраэдрической) области.

4.Трилинейные координаты.

4.1. Понятие системы трилинейных координат.

Рассмотрим применение геометрии к решению задач, в которых требуется разделить жидкость на определенные пропорции с помощью инструментов, казалось бы, непригодных для этого. Для решения нам понадобятся так называемые трилинейные координаты, которые мы сейчас и опишем.

Обычно для нанесения точек с заданными декартовыми координатами пользуются миллиметровой бумагой. Для наших целей лучше использовать триангулированную бумагу, т. е. бумагу, на которой проведены три системы параллельных линий, разбивающих ее на маленькие равносторонние треугольники. Нарисуем на такой бумаге большой равносторонний треугольник *ABC* со сторонами, проходящими по линиям сетки. Для произвольной точки *P* в этой плоскости определим числа x, y, z как расстояния от этой точки до прямых BC, CA и AB соответственно, причем для каждой из этих прямых расстояние будем считать положительным, если точка лежит по ту же сторону от этой прямой, что и треугольник ABC, и отрицательным в противном случае. Полученную тройку чисел (x, y, z) будем называть *трилинейными координатами точки P относительно треугольника ABC.* Заметим, что для точек, лежащих внутри треугольника ABC, все три координаты положительны. Кроме того, если a – длина стороны треугольника, а h – высоты($h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$), то $\frac{1}{2}$ (ax+ay+az) = S_{PBC} + S_{PCA} + +S_{PAB} = S_{ABC} = $\frac{1}{2}$ ah, откуда следует, что $x + y + z = h$.

Трилинейные координаты чрезвычайно удобны для описания ситуации, в которой участвуют три переменные величины, имеющие постоянную сумму. Если одна из этих величин x, y или z остается постоянной, а две другие изменяются, то точка (x, y, z) движется по прямой, параллельной одной из сторон треугольника ABC. В частности, прямые, на которых лежат стороны BC, CA и AB, описываются уравнениями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, а вершины A, B, C имеют координаты $(h, 0, 0)$, $(0,h,0)$, $(0, 0, h)$.

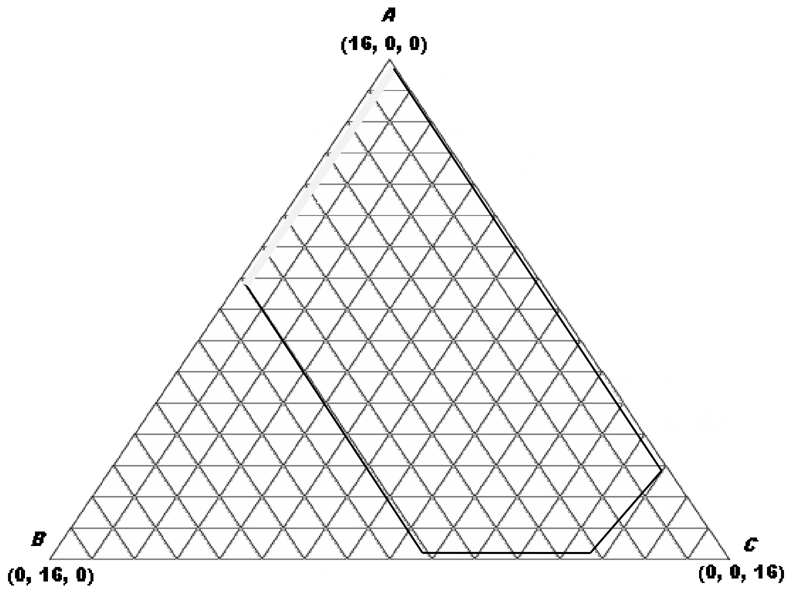
- **Идея метода:**
- Нарисовать равносторонний треугольник.
- Определить область операций для данной задачи
- Зафиксировать состояния точек в отдельной таблице.
- **Преимущества метода:**
- Простота.
- Легкость поиска решения.
- Возможность обобщить метод на широкий класс задач.

4.2 Решение задач с помощью трилинейных координат

<u>*Задача № 3*</u>

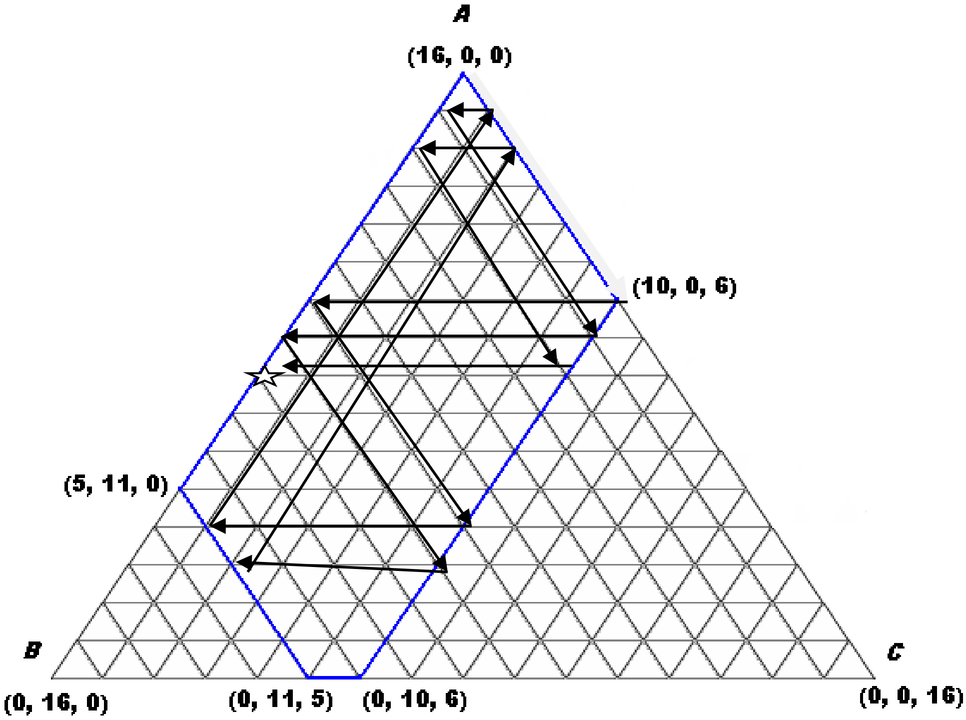
«Имеются три бочонка: 16, 11 и 6 - ведёрные. 16 - ведёрный бочонок полон, 11 и 6 - ведёрные пусты. Требуется разделить квас поровну, используя только эти бочонки».

Так как по условию задачи у нас имеется 16 л кваса, 3 бочонка емкостью 16 л, 11 л и 6 л и первый бочонок полон, то чертим трилинейную координатную сетку, а именно: равносторонний треугольник с вершинами *A, B, C*, координаты которых равны $A(16, 0, 0)$, $B(0, 16, 0)$, $C(0, 0, 16)$.

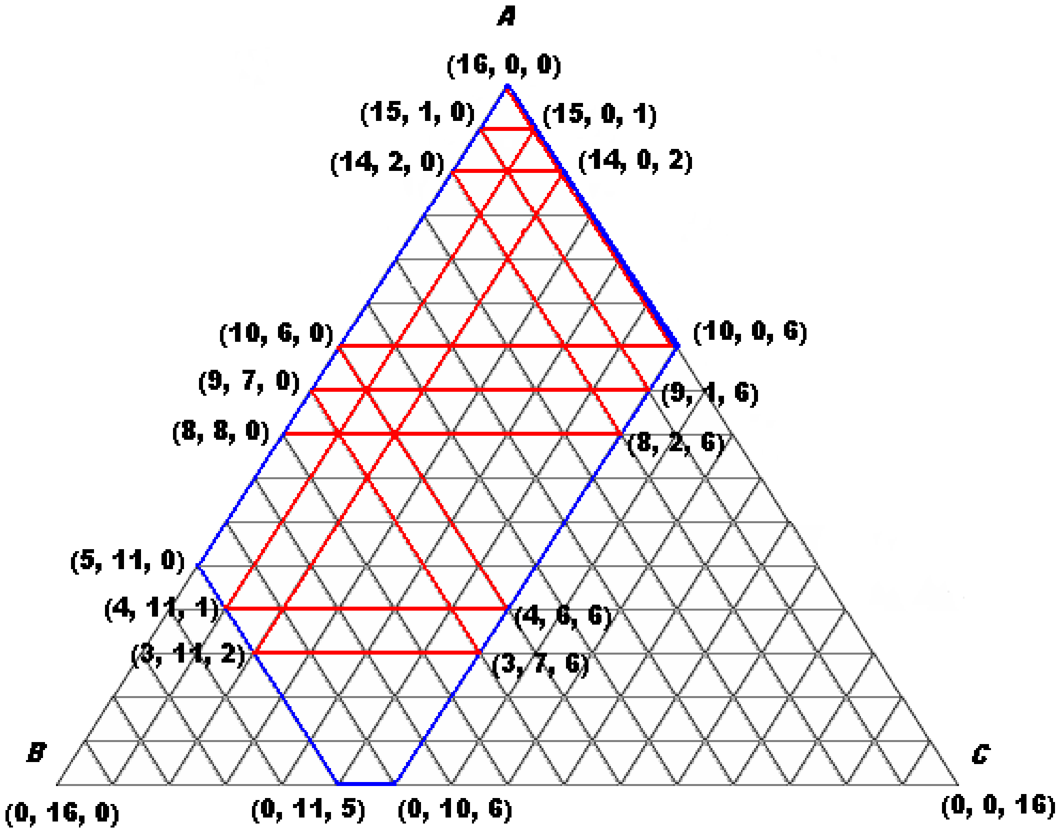


2. Определение области операций для данной задачи.

Определяем *область операций*: $0 \le x \le 16$, $0 \le y \le 11$, $0 \le z \le 6$. Соответственно областью операций является пятиугольник, ограниченный прямыми $x = 0$ и $x = 16$, $y = 0$ и $y = 11$, $z = 0$ и $z = 6$. Получили пятиугольник с вершинами, координаты которых (16, 0, 0), (10, 0, 6), (0, 10, 6), (0, 11, 5), (5, 11, 0). Определяем 2 точки: начало операций в точке (16, 0, 0) и конец операций в точке (8, 8, 0) – так как по условию задачи 16 л кваса находятся в 16-ти литровом бочонке, а два других пусты; и требуется разделить 16 л пополам.



Используя данную схему, нужно пройти определенный путь, чтобы из точки (16, 0, 0) оказаться в точке (8, 8, 0), а именно: (16, 0, 0) → (10, 0, 6) → (10, 6, 0) → (4, 6, 6) → (4, 11, 1) → (15, 0, 1) → (15, 1, 0) → (9, 1, 6) → (9, 7, 0) → (3, 7, 6) → (3, 11, 2) → (14, 0, 2) → (14, 2, 0) → (8, 2, 6) → (8, 0, 0).



4. 3. Выводы

Можно сделать вывод, что для выполнения поставленного в задаче условия необходимо сделать 15 переливаний, чтобы разделить при помощи данных сосудов имеющиеся 16 л кваса пополам.

Если бы эту задачу решали методом подбора, то на нахождение данного решения ушло бы очень много времени. А применение системы трилинейных координат является более рациональным способом.

5. Алгоритмы решения задач на переливание.

5..1 Математический бильярд.

1. Построить геометрическую фигуру, зависимости от количества сосудов.

2. На сторонах параллелограмма отмечаем точки по количеству литров в сосудах и пронумеровываем их.

3. Строим равносторонние треугольники.

4. Передвигать шар по траектории, внимательно следя за ходами которые мы делаем.

5. Записываем результаты.

5.2. Трилинейные координаты.

1. Построить равносторонний треугольник, зависимости от количества сосудов.
2. На сторонах треугольника отмечаем точки по количеству литров в сосудах и пронумеровываем их.
3. Строим равносторонние треугольники внутри большого треугольника.
4. Определяем область операций для данной задачи.
5. Передвигать шар по траектории, внимательно следя за ходами которые мы делаем.
6. Записываем результаты.

6. Заключение.

Математика – величайшая и интереснейшая наука в мире. Она помогает решать примеры или задачи разными способами. Так же она помогает развивать логическое и абстрактное мышление человека. Модели представленные в работе неожиданно много имеют применений в теории чисел, механике, физике и арифметике.

Я в этой работе наиболее подробно исследовал применение двух методов в, так называемых, задачах на переливание. Привел модели таких задач,

условия разрешимости и алгоритмы решения, как арифметическим способом, так и с помощью рассматриваемых моделей.
Способ «математического бильярда» мне показался лёгким и очень простым. Можно визуально представить себе эту задачу.

А метод трилинейных координат, мне кажется, можно использовать более широко для решения задач на смеси, задач на справедливый дележ имущества, а также на обмен имуществом.

Рассматриваемые задачи традиционно встречаются на олимпиадах по математике различного уровня, и, несомненно, данная работа будет отличным подспорьем, для желающих научится решать данные задачи.
Математика соединила в себе не соединимые вещи. Законы движения бильярдных шаров и логику переливание сосудов. Это значит, что всё в мире подчиняется общим законам математики.

7. Литература.

1. Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики).— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 288 с.

2. Капкаева Л. В. Интеграция алгебраических и геометрических методов в решении задач. http://mat.1september.ru/2003/16/no16_1.htm

3. Коксетер Г.С.М. и Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978

4. Савина Л.А. Задача о трех кувшинах // Журнал «Квант». – 1978. – № 5. – С.29 – 32.

5. Перельман Я.И. Занимательная геометрия М.: ГИФМЛ, 1959 (стр. 233-239)

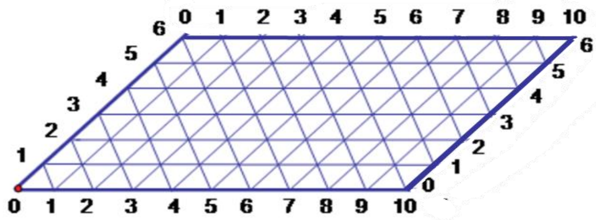
6. Задачи на переливания. http://rsa.iso.karelia.ru/matem/test/pereliv.doc.

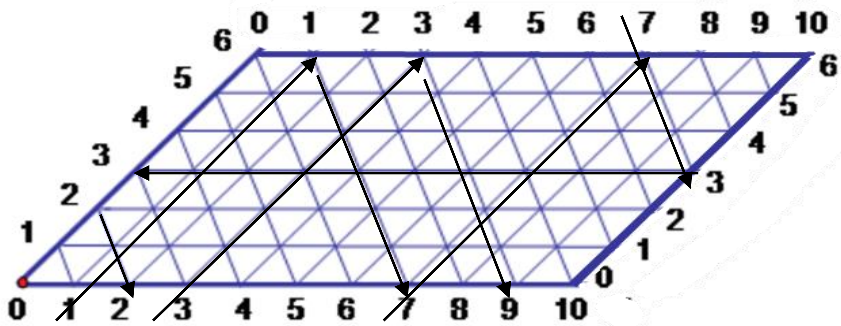
8. Приложение.

Задачи на переливание от автора.

Задача №1

- Капитан Немо плавал на своей подводной лодке «Наутилус» в Индийском океане. И вдруг на него нападают пираты и пробивают отсек лодки который должен заполнять балласт водой для погружения. Матросам нужно заполнить балласт водой вручную, как можно быстрее имея 10 тыс. и 6 тыс. бочки. А объём балласта 8 тыс. литров.

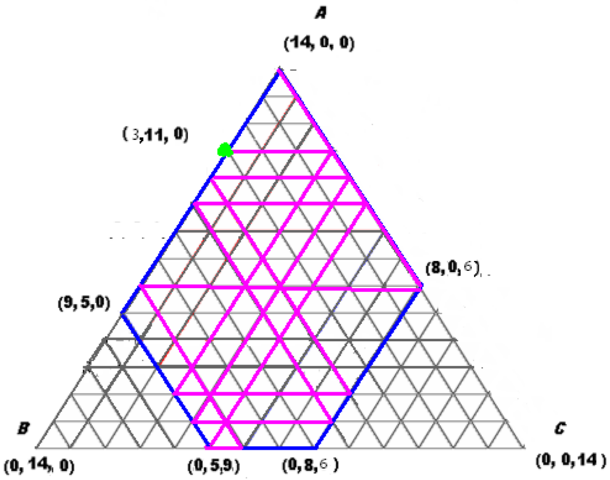




Бочки.	1	2	3	4	5	6
10 тыс.	10	4	4	0	10	8
6 тыс.	0	6	0	4	4	6

Задача №2

- В бочке 14 литров раствора. Для уничтожения вредителей сельскохозяйственной культуры потребуется 4 литра раствора. Как с помощью 9 и 8 литровых емкостей отмерить требуемое количество



раствора?

14л. бочка	14	6	6	0
9л. бидон	0	0	8	8
8 л. бидон	0	8	0	6