Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №3 имени М. Ф. Леонова с. Приволжье муниципального района Приволжский Самарской области

Научно исследовательская работа

Предметное отделение: математика

Тема: Многочлены n-ой степени

Ф.И.О. Шубина Алена Александровна

Класс: 10 ГБОУ СОШ№3 им. М.Ф. Леонова Россия, с. Приволжье

Руководитель:

ГБОУ СОШ№3 им. М.Ф. Леонова Россия, с. Приволжье

Чернобровкина Ольга Ивановна

Содержание

1. Введение.

В разделе «Для тех, кто хочет знать больше», из учебника алгебры девятого класса, рассматривается тема: «Некоторые приемы решения целых уравнений». Этот материал вызвал у меня большой интерес. Существует много уравнений и неравенств, которые считаются задачами повышенной трудности. Для решения таких задач лучше применять не традиционные методы, а приемы, которые не совсем привычны для нас. При знании приведенных приемов многие трудные задачи окажутся вполне посильными. Эти приемы можно применять и в решении уравнений, и в построении графиков функций, и в решении уравнений с параметром. Такие уравнения встречаются в экзамене ОГЭ по математике. Я стала изучать подробно эту тему, и все свои открытия решила изложить в научно - исследовательской работе. В своей работе буду рассматриваться несколько способов разложения многочленов n-ой степени на множители. Сравню все полученные результаты на одних и тех же многочленах:

$x^3 – 5x^2 + 7x -3$; $x^4 – 5x^3 +7x^2 - 5x +6$.

Цель:

- Найти самый простой способ разложения на множители многочленов третьей и четвертой степени, при условии, что коэффициент высшей степени равен единице.
- Выпустить буклет с применением разных способов разложения на множители многочленов n-ой степени

Объект исследования: многочлены n- ой степени.

Задачи исследования:

- Изучить литературу, в которой рассматриваются решения разложений многочлена на множители n- ой степени.
- Научиться применять различные способы разложения многочлена на множители третьей и четвертой степени.

Гипотеза: умение применять рассмотренные способы разложения многочлена на множители, помогут сэкономить время для решения более сложных задач.

Методы исследования:

- Анализ литературы, в которой рассматриваются решения разложений многочлена на множители n- ой степени.
- Математическая обработка данных
- Решение уравнений n- ой степени, решение уравнений с параметром, построение графика.
- Обобщение.

Актуальность темы: умение применять любой из данных способов в разложении многочлена на множители n- ой степени.

2.1. *Метод неопределенных коэффициентов*.

Суть этого метода состоит в том, [1,2] что заранее предполагается вид множителей – многочленов, на которые разлагается данный многочлен. Этот метод опирается на следующие утверждения:

1. Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.
2. Любой многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратного множителей.

Когда решаем уравнение третьей степени, то будем искать многочлены

$(x-\alpha)\cdot(\beta_1 x^2+\beta_2 x+\beta_3)$ преобразовав получим:

$\beta_1 x^3+(\beta_2-\alpha\beta_1)x^2+(\beta_3-\alpha\beta_2)x-\alpha\beta_3$

Далее приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и получаем систему для нахождения α, β_1, β_2,β_3

Рассмотрим пример:

разложи на множители: x^3-5x^2+7x-3

Будем искать многочлены $(x-\alpha)\cdot(\beta_1 x^2+\beta_2 x+\beta_3)$, такие, что справедливо тождественное равенство $x^3-5x^2+7x-3=(x-\alpha)\cdot(\beta_1 x^2+\beta_2 x+\beta_3)$,

$x^3-5x^2+7x-3=\beta_1 x^3+(\beta_2-\alpha\beta_1)x^2+(\beta_3-\alpha\beta_2)x-\alpha\beta_3$

$$\begin{cases}\beta_1=1\\ \beta_2-\alpha\beta_1=-5\\ \beta_3-\alpha\beta_2=7\\ \alpha\beta_3=3\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_2=-5+3=-2\\ \beta_3=7+3*(-2)=1\\ \alpha=3:1=3\end{cases}$$

Легко видеть, что этим равенствам удовлетворяют числа $\beta_1=1$, $\beta_2=-2$, $\beta_3=1$, $\alpha=3$, отсюда следует вывод: $x^3-5x^2+7x-3=(x-3)(x^2-2x+1)=(x-3)(x-1)^2$

2.2 Метод подбора корня многочлена по его старшему и свободному коэффициенту.

Этьен Безу. Французский математик (1730г -1783г).

Иногда при разложении многочлена на множители, бывают полезны следующие утверждения: [1,2,3].

1. Остаток от деления многочлена F(x) на линейный двучлен (x - α) равен значению многочлена в точке, т.е. числу F(α).
2. Для того, чтобы многочлен F(x) делился на двучлен (x - α), необходимо и достаточно, чтобы F(α) =0, т.е. чтобы α было корнем многочлена F.
3. Если все коэффициенты многочлена – целые числа, то каждый его рациональный корень $\frac{p}{q}$ имеет числителем p делитель свободного члена α_0 , а знаменателем q -делитель старшего коэффициента.

Применим данный способ в разложении на множители: $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

Если это уравнение имеет целый корень, то он является делителем числа -3, т.е. равен одному из чисел: 1, -1, 3, -3. Сделаем проверку.

F(3) = 27-45+21-3=0, F(1)=1-5+7-3=0,F(-1) =-1-5-7-3=-16,

F(-3) = -27-45-21 -3 = -96.

Значит многочлен $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ можно представить в виде (x-3)F(x), где F(x) – многочлен второй степени и можно представить в виде (x-1)F(x).

Для того, чтобы найти многочлен F(x), разделим многочлен

$x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ на двучлен (x-3). Деление многочленов выполним уголком.

$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \mid \underline{x-3}$

$x^3 - 3x^2 \qquad x^2 - 2x + 1$

$2x^2 + 7x$

$2x^2 + 6x$

$x - 3$

$x - 3$

0

$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \mid \underline{x-1}$

$x^3 - x^2 \qquad x^2 - 4x + 3$

$-4x^2 + 7x$

$-4x^2 + 4x$

$3x - 3$

$3x - 3$

0

Вывод: $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-3)(x^2 - 2x + 1) = (x-3)(x-1)^2$

$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)(x^2 - 4x + 3) = (x-1)(x-1)(x-3).$

2.3 Схема Горнера

Уильям Джордж Горнер. Британский математик, в честь которого названа схема Горнера. (1786г -1837г).

$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_n = (x - \alpha)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + P(\alpha)$

α_0	α_0	α_2	α_k	α_{n-1}	α_n
$b_0 = \alpha_0$	$b_1 = \alpha_1 + \alpha b_0$	$b_2 = \alpha_2 + \alpha b_1$	$b_k = \alpha_k + \alpha b_{k-1}$	$b_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha b_{n-2}$	остаток $= \alpha_n + \alpha b_{n-1}$

Если нам даны [2,3.4]($\alpha_{0\ldots}\ \alpha_n$) и (b$_{0\ldots}b_n$) – числа, то если мы предполагаем, что число α является нашим корнем, то мы записываем слева в таблицу, затем сносим первый элемент таблицы, а для каждого элемента до конца мы умножаем предыдущий элемент строки на α и прибавляем к строке. Если в конце (в остатке на деление на α) мы получили 0, то тогда число является корнем уравнения, а получившиеся элементы строки – коэффициентами перед соответствующими x, смещенными на один влево.

Рассмотрим тот же многочлен: $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

Для этого записываем коэффициенты в таблицу

	1	-5	7	-3

Находим предположительные корни. Они равны делителям свободного члена, то есть 1,-1,3,-3. Проверяем очевидные корни. Записываем его в таблицу. Заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец.

	1	-5	7	-3
1	1	-5+1*1=-4	7+1*(-4)=3	-3+1*3=0
-1	1	-5-1*1=-6	7-1*(-6)=13	-3-1*8=-11
3	1	-5+3*1=-2	7+3*(-2)=1	-3+3*1=0
-3	1	-5-3*1=-8	7-3*(-8)=31	-3-3*31==96

Что означает полученный результат?

В двух строчках получился 0. Остаток от деления многочлена на (x-1) равен 0, то есть 1 – корень нашего уравнения.

Остаток от деления многочлена на (x-3) равен 0, то есть 3 – корень нашего уравнения.

Действительно нетрудно проверить, что

$(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)(x-1)(x-3)$,

$(x-3)(x^2-2x+1)=(x-3)(x-1)(x-1)$.

Применим все найденные мною способы разложения на множители в многочлене четвертой степени.

2.4 Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим многочлен: $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$

Выведем формулу: [1,2]

$(x-2)(ax^3+\beta x^2+cx+d)=ax^4 + \beta x^3 + cx^2 + dx - 2ax^3 - 2\beta x^2 - 2cx - 2d = ax^4 + x^3(\beta-2a)+x^2(c-2\beta)+x(d-2c)-2d$

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = a^4 + (\beta-2a)x^3 + (c-2\beta)x^2 + (d-2c)x - 2d.$

$$\left[\begin{array}{l} a=1 \\ \beta-2a=-5 \\ c-2\beta=7 \\ d-2c=-5 \\ -2d.=6 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \beta=-3 \\ c-2(-3)=-7 \quad c=1 \\ d-2(-13)=-5 \\ d=-3 \end{array}\right.$$

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x^3-3x^2+x-3).$

Применим метод группировки в многочлене x^3-3x^2+x-3.

$x^3-3x^2+x-3=(x^3-3x^2)+(x-3)=x^2(x-3)+(x-3)=(x-3)(x^2+1),$

тогда окончательный результат: $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)(x^2+1).$

2.5. Метод подбора корня многочлена по его старшему и свободному коэффициенту.

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$

Поскольку коэффициент при $x^4=1$, [2,3] то рациональные корни данного многочлена, если они существуют, являются делителями числа 6, т. е. могут быть целыми числами 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

F(1)=4, F(-1)=23, F(2)=0 , тогда числа 1 и -1 не являются корнями многочлена.

Значит, данный многочлен делиться на двучлен x-2.

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 | \underline{x-2}$

$\underline{x^4-2x^3} x^3-3x^2+x-3$

$-3x^3+7x^2$

$\underline{3x^3+6x^2}$

x^2-5x

$\underline{x^2-2x}$

$-3x+6$

$\underline{-3x+6}$

0

Вывод: $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6=(x-2)(x^3-3x^2+x-3)=(x-2)(x-3)(x^2+1)$

Применим метод группировки: $x^3-3x^2+x-3=x^2(x-3) +(x-3)=(x-3)(x^2+1)$.

2.6. Схема Горнера

$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_n = (x - \alpha)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + P(\alpha)$

α_0	α_0	α_2	α_k	α_{n-1}	α_n
$b_0 = \alpha_0$	$b_1 = \alpha_1 + \alpha b_0$	$b_2 = \alpha_2 + \alpha b_1$	$b_k = \alpha_k + \alpha b_{k-1}$	$b_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha b_{n-2}$	остаток $= \alpha_n + \alpha b_{n-1}$

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$. Находим предположительные корни. [2,3,4]. Они равны делителям свободного члена, то есть 1,-1, 2, -2, 3, -3. Проверяем очевидные корни. Записываем его в таблицу. Заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец.

	1	-5	7	-5	6
1	1	-5+1*1=-4	7+1*(-4)=3	-5+1*3=-2	6+1*(-2)=4
2 корень	1	-5+2*1=-3	7+2*(-3)=1	-5+2*1=-3	6+2*(-3)=0
3 корень	1	-5+3*1=-2	7+3*(-2)=1	-5+3*1=-2	6+3*(-2)=0
-1	1	-5-1*1=-6	7-1*(-6)=13	-5-1*13=-18	6-1*(-18)=24
-2	1	-5-2*1=-7	7-2*(-7)=21	-5-2*21=-47	6-2*(-47)=101

Что означает полученный результат? Во второй и третьей строчке получился 0. Остаток от деления многочлена на (x-2) равен 0, то есть 1 – корень нашего уравнения.

Остаток от деления многочлена на (x-3) равен 0, то есть 3 – корень нашего уравнения. Действительно нетрудно проверить, что

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)(x^2+1)$

$x^3 - 3x^2 + x - 3$ | $\underline{x - 3}$

$\underline{x^3 - 3x^2}$ $\quad x^2 + 1$

$x - 3$

$\underline{x - 3}$

0

Практическое применение

Применим схему Горнера при решении уравнений с параметром. Рассмотрим два уравнения.

1. Найдите наибольшее целое значение параметра а, при котором уравнение f(x)=0 имеет три различных корня, один из которых x_0.

$f(x)= x^3 +8x^2+ax+b$, $x_0=-3$

Так как один из корней -3, то применим схему Горнера

	1	8	a	b
-3	1	8-3*1=5	a-3*5=-15+a	0

-3(-15+a)+b=0

45-3a+b=0

b=3a-45

$x^3 +8x^2+ax+b=(x+3)(x^2+5x+(a-15))$

$x^2+5x+(a-15)=0$

a=1 b=5 c=(a-15)

$D=b^2-4ac=25-4(a-15)=25+60-4a>0$

85-4a>0

4a<85

a<21

Вывод: наибольшее целое значение параметра а, при котором уравнение f(x)=0 имеет три корня, а=21.

Ответ: 21.

2. Найдите наибольшее целое значение параметра а, при котором уравнение f(x)=0 имеет три различных корня, один из которых x_0.

   $f(x)=x^3-11x^2+ax+b$, $x_0 =4$

Так как один из корней 4, то применим схему Горнера

	1	-11	a	b
4	1	-11+4*1=-7	a+4*(-7)=-28+a	0

$x^3-11x^2+ax+b=(x-4)(x^2-7x+(a-28))$

f(x)=0, если x=4 или $x^2-7x+(a-28)=0$

$D=b^2-4ac=49-4(a-28)=49+112-4a=161-4a>0$

$161-4a>0$

$-4a<-161$

$a<40$

Вывод: уравнение имеет три корня при наибольшем целом значении a=40.

Применим схему Горнера при построении графика.

Постройте график функции, $y=\frac{x^4-5x^2+4}{(x-1)(x+2)}$

И определите, при каких значениях параметра c прямая y=c имеет с графиком ровно одну общую точку.

Разложим числитель дроби (x^4-5x^2+4) на множители

Поскольку коэффициент при $x^4=1$, то рациональные корни данного многочлена, если они существуют, являются делителями числа 4, т. е. могут быть целыми числами 1, -1, 2, -2, 4, -4.

Проверяем очевидные корни. Записываем его в таблицу. Заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец.

	1	0	-5	0	4
1 корень	1	0+1*1=1	-5+1*1=-4	0+1*(-4)=-4	4+1*(-4)=0
-1 корень	1	0-1*1=-1	-5-1*(-1)=-4	0-1*(-4)=4	4-1*4=0
2 корень	1	0+2*1=2	-5+2*2=-1	0+2*(-1)=-2	4+2*(-2)=0
-2 корень	1	0-2*1=-2	-5-2*(-2)=-1	0-2*(-1)=2	4-2*2=0
4	1	0+4*1=4	-5+4*4=11	0+4*11=44	4+4*44=180
-4	1	0-4*1=-4	-5-4*(-4)=11	0-4*11=-44	4-4*(-44)=180

$x^4-5x^2+4=(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$.

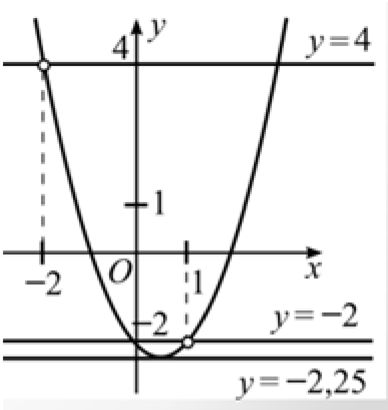
При $x\neq1$ и $x\neq-2$ функция примет вид: $y=(x+1)(x-2)$

Графиком функции является парабола, ветви направлены вверх.

выколоты точки (1;-2) и (-2;4)

вершина параболы (0,5;-2,25).

Прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколота.



Вывод: c=-2,25; c=-2; c=4.

Ответ: c=-2,25; c=-2; c=4.

Применим схему Горнера при решении уравнений

Рассмотрю уравнение из раздела «Для тех, кто хочет знать больше» алгебра 9 класс под редакцией С. А. Теляковского.

$x^3-8x^2+13x-2=0$

Поскольку коэффициент при $x^4=1$, то рациональные корни данного многочлена, если они существуют, являются делителями числа -2, т. е. могут быть целыми числами 1, -1, 2, -2.

Проверяем очевидные корни. Записываем его в таблицу. Заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец.

	1	-8	13	-2
1	1	-8+1*1=-7	13+1*(-7)=6	-2+1*6=4
-1	1	-8-1*1=-9	13-1*(-9)=22	-2-1*22=-24
2 корень	1	-8+2*1=-6	13+2*(-6)=1	-2+2*1=0
-2	1	-8-2*1=-10	13-2*(-10)=-7	-2-2*(-7)=12

Поделим данный многочлен на (x-2)

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-8x^2+13x-2 & \underline{x-2} \\
\underline{x^3-2x^2} & x^2-6x+1 \\
\quad -6x^2+13x & \\
\quad \underline{-6x^2+12x} & \\
\qquad\quad -x-2 & \\
\qquad\quad \underline{x-2} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Исходное уравнение можно представить в виде: $x^3-8x^2+13x-2=(x-2)(x^2-6x+1)$.

Приравниваем множители к нулю: $x-2=0$

$x=2$

$x^2-6x+1=0$

D=36-4=32>0 2 корня.

Первый корень: $3-\sqrt{8}$; второй корень: $3+\sqrt{8}$

Ответ: 2; $3-\sqrt{8}$; $3+\sqrt{8}$.

Заключение.

В своей работе, я описала несколько способов разложения многочленов на множители третьей и четвертой степени. Эта исследовательская работа для меня была очень интересна. Ведь я научилась применять нестандартные способы в разложении многочленов на множители. Убедилась, что применяя разные способы, я получаю один и тот же ответ. Это здорово!

Каждый из этих способов, по- своему интересен. Для меня оказался самый простой способ с применением схемы Горнера.

Изучив эту тему, я могу быстро разложить многочлены n-ой степени на множители и применить это в решении уравнений, в построении графиков, в решении уравнений с параметрами.

Я считаю, что цель моей работы достигнута. Готово выступление для своих одноклассников и выпуска буклета по этой теме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика для старшеклассников. Домашний репетитор. Д. Т. Письменный. Айрис Рольф 1996.
2. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства(пособие для учащихся 10-11 классов) Экзамен. Москва 1998г. С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасмченко.
3. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. - М.: Наука, 1987. - 432 с.
4. Числа и многочлены. Методическая разработка для заочного отделения МММФ/ Автор - составитель А.В. Деревянкин. - М., Издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008 - 72 с.