Областной научный форум молодых исследователей «Шаг в будущее»
(Россия, Тюмень, 2022г.)

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

Выполнила:

Черноскутова Ирина Игоревна,

учащаяся 8 класса

МАОУ Новоселезневская СОШ

Россия, п.Новоселезнево Тюменской области

Казанского района

Руководитель:

Черноскутова Наталья Петровна,

учитель математики

МАОУ Новоселезневская СОШ

Россия, п.Новоселезнево Тюменской области

Казанского района

Введение

Первое знакомство с понятием координаты в жизни школьника происходит на уроках математики в 5 классе при изучении координатного луча. В 6 классе при изучении отрицательных чисел координатный луч дополняется до координатной прямой, а после введения рациональных чисел изучается координатная плоскость. Затем на уроках алгебры в 7 классе школьники учатся строить графики в координатной плоскости. При изучении вопроса о том, как появились и какое применение имеют координаты в жизни человека, я узнала, что в математике координаты применяются не только для работы с графиками на уроках алгебры, но и в геометрии для решения задач. В геометрии применяются различные методы решения задач. Основным методом считается синтетический (чисто геометрический), а из других наиболее высокое положение занимает метод координат потому, что он тесно связан с алгеброй. Многие геометрические задачи решаются очень сложно, а с применением метода координат, решение упрощается.

Этим и определяется ***актуальность*** выбранной темы: «Решение геометрических задач методом координат»

Объект исследования: решение геометрических задач.

Предмет исследования: метод координат как способ решения геометрических задач.

Цель исследования: показать преимущество применения этого метода для решения геометрических задач.

Гипотеза: использование метода координат для решения некоторых геометрических задач целесообразнее.

Для достижения цели были поставлены следующие ***задачи***:

1. Изучить литературу по данной проблеме.
2. Проверить эффективность метода при решении конкретных геометрических задач.

Методы и приёмы: изучение и анализ литературы и ресурсов сети интернет, обобщение собранного материала, наблюдение, практическая работа.

Практическая значимость: обобщённый материал данного исследования можно применять как на уроках математики, так и на внеурочных занятиях. Данный материал помогает прививать интерес к математике, показать разнообразие способов решения геометрических задач, способствует формированию представления о возможностях математики, подготавливает выпускников основной школы к дальнейшему изучению математики, в том числе и высшей.

Основное содержание

Метод координат

Введение координат позволяет определить положение точки с помощью чисел – координат этой точки. ***Метод координат*** дает возможность записывать геометрические фигуры на языке арифметики, указывая координаты точек этих фигур, или же на языке алгебры с помощью уравнений, решениями которых являются координаты точек данных фигур. Это позволяет применять алгебраические методы при решении геометрических задач и, наоборот, исследовать уравнения с помощью обращения к их графической интерпретации. [1].

Идея координат зародилась в науке Вавилона и Греции в связи с потребностями географии, астрономии и мореплавания. Еще во II в. до н.э. греческий ученый Гиппарх предложил определять положение точки на земной поверхности с помощью географических координат – широты и долготы, выражаемых числами. В XIV в. француз Оресм (1323–1382) перенес эту идею в математику, предложив покрывать плоскость прямоугольной сеткой и называть широтой и долготой числа, характеризующие положение точки на этой сетке. Наконец, в XVII в. французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650) первым увидел и реализовал возможность записи геометрических фигур – линий на координатной плоскости с помощью алгебраических уравнений, связывающих координаты точек этих линий, что послужило основой создания новой отрасли математики – *аналитической геометрии*. Значение аналитической геометрии состоит прежде всего в том, что она установила тесную связь между геометрией и алгеброй [1].

Сущность метода координат как метода решения задач состоит в том, что, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, можно решать геометрическую задачу средствами алгебры.

Чтобы решить задачу методом координат нужно поступить следующим образом.

1. Ввести систему координат удобным образом (исходя их свойств заданной фигуры).

2. Записать условие задачи в координатах, определив во введенной системе координат, координаты точек.

3. Выполнить преобразование аналитического выражения.

4. Выполнить обратный перевод, т. е. перевод с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Главное при решении геометрических задач координатным методом – удачный выбор системы координат: выбор начала координат и направления осей. Обычно в качестве осей координат выбираются прямые, фигурирующие в условии задачи, а также оси симметрии (если таковые имеются) фигур, рассматриваемых в задаче.

Простейшие (*вспомогательные)* задачи в координатах

Если на плоскости введена система координат, то решение многих вопросов существенно упрощается.

Например, можно находить расстояние d между двумя точками с известными координатами $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ не выполняя измерений, а с помощью простой формулы: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Используя формулу расстояния, можно решать немало геометрических задач на вычисления и доказательства, а также составлять уравнения кривых, свойства которых описываются с помощью расстояния [1].

Также можно найти координаты точки А, являющейся серединой отрезка A_1 A_2. Пусть А(x; y), $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, тогда $x = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Среди задач, предполагающих использование этих формул, встречаются, как и те, в которых напрямую стоит вопрос рассчитать координаты середины отрезка, так и такие, что предполагают приведение заданных условий к этому вопросу: зачастую используется термин «медиана», ставится целью нахождение координат одного из концов отрезка, а также распространены задачи на симметрию.

В качестве примера, иллюстрирующего применение метода координат, а именно указанных выше формул, для решения геометрических задач, рассмотрим несколько задач на вычисление и на доказательство.

Задачи на вычисление

Задача 1. Найти медиану АМ треугольника АВС, вершины которого имеют координаты: А(0; 1), В(1; -4), С(5; 2) [2].

Найдем координаты точки М(x; y) как середины отрезка ВС:

$x = \frac{1+5}{2} = 3$; $y = \frac{-4+2}{2} = -1$. Т.о. М(3; -1)

Найдем длину отрезка АМ как расстояние между его концами:

$AM = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Ответ: $AM = \sqrt{13}$

Задача 2. Найти периметр треугольника MNP, если M(4; 0), N(12; -2), P(5;-9) [2, 3].

Пользуясь формулой вычисления расстояния между точками найдем длины сторон треугольника:

$MN = \sqrt{(12-4)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$;

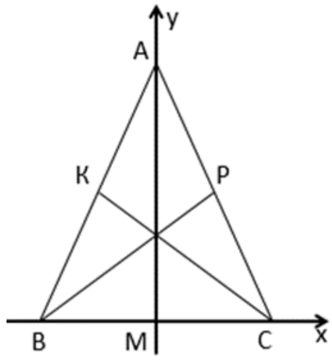
$NP = \sqrt{(12-5)^2 + (-2+9)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$;

$MP = \sqrt{(5-4)^2 + (-9-0)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$.

Найдем периметр: $P = 2\sqrt{17} + 7\sqrt{2} + \sqrt{82}$.

Ответ: Р = $2\sqrt{17} + 7\sqrt{2} + \sqrt{82}$.

Задача 3. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы этого треугольника [5].



Свяжем систему координат с равнобедренным треугольником ABC так, как показано на рисунке. Тогда, учитывая, что основание BC=80см, высота AM= 160см, вершины имеют следующие координаты: A(0;160), B(-40; 0), C(40; 0), точка M(0; 0)

По формулам координат середины отрезка найдем координаты точек Р и К – середин сторон АС и АВ соответственно:

P: $x = \frac{0+40}{2} = 20$; $y = \frac{160+0}{2} = 80$, P(20; 80)

K: $x = \frac{0+(-40)}{2} = -20$; $y = \frac{160+0}{2} = 80$, K(-20; 80)

Пользуясь формулой вычисления расстояния между точками найдем длины медиан ВР и СК:

$BP = \sqrt{(20-(-40))^2 + (80-0)^2} = \sqrt{3600+6400} = \sqrt{10000} = 100$ (см);

$CK = \sqrt{(-20-40)^2 + (80-0)^2} = \sqrt{3600+6400} = \sqrt{10000} = 100$ (см).

Ответ: ВР = СК = 100см.

Решим задачу, отражающую тесную связь алгебры с геометрией.

Задача 4. Найти расстояние от точки (1; -7) до вершины параболы $y = x^2 + 6x - 1$ [5].

Сначала найдем координаты вершины параболы:

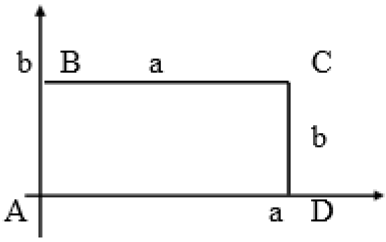
$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$; $y_0 = y(x_0) = (-3)^2 + 6 \times (-3) - 1 = -10$. Т.о. вершина (-3; -10)

Теперь найдем искомое расстояние:

$d = \sqrt{(-3-1)^2 + (-10+7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Ответ: 5

Задачи на доказательство

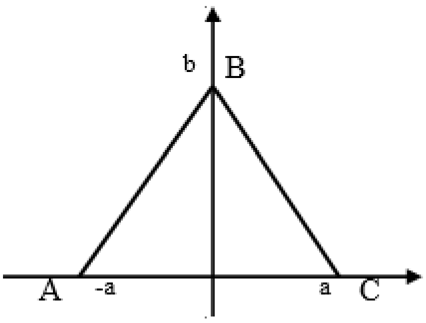


Задача 1. Доказать, что диагонали прямоугольника равны (свойство прямоугольника) [2, 3].

Свяжем систему координат с прямоугольником ABCD так, как показано на рисунке. Тогда вершины имеют следующие координаты: A(0;0), B(0; b), C(a; b), D(a; 0)

Используя формулу расстояния, найдем длины диагоналей: AC=$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$, BD = $\sqrt{(a-0)^2+(0-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$. Из этого следует, что диагонали прямоугольника равны. Что и требовалось доказать.

Задача 2. Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его высотой, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника) [2].



Свяжем систему координат с треугольником ABC так, как показано на рисунке. Тогда вершины имеют следующие координаты: A(-a;0), B(0; b), C(a; 0).

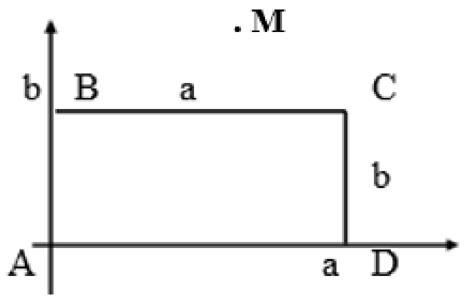
Используя формулу расстояния, найдем длины сторон:

AB = $\sqrt{a^2+b^2}$, BC = $\sqrt{a^2+b^2}$.

Т.к. в треугольнике две стороны равны, то по определению треугольник – равнобедренный. Что и требовалось доказать.

Задача 3. Докажите, что суммы квадратов расстояний от любой точки плоскости до противоположных вершин прямоугольника равны (т.е. для прямоугольника ABCD и любой точки M справедливо равенство

$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$) [1].



Свяжем систему координат с прямоугольником ABCD так, как показано на рисунке. Тогда вершины имеют следующие координаты: A(0;0), B(0; b), C(a; b), D(a; 0). Точка M(x; y). Используя формулу расстояния, найдем суммы квадратов соответствующих расстояний:

$MA^2 + MC^2 = x^2 + y^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2$, $MB^2 + MD^2 = x^2 + y^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2$

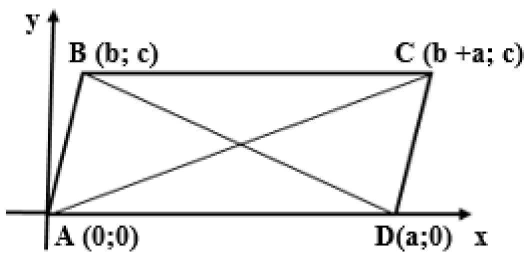
Т.е. $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$, что и требовалось доказать.

Задача 4. Докажите, что треугольник с вершинами в точках A(2; 2), B(1; 5), C(3; 3) является прямоугольным [1].

Используя формулу расстояния, найдем длины сторон: $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{8}$, $AC = \sqrt{2}$

Т.к. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC – прямоугольный. Что и требовалось доказать.

Задача 5 (теорема): Сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей [1].



Свяжем систему координат с параллелограммом ABCD так, как показано на рисунке. Тогда вершины имеют координаты: A(0;0), B(b;c), D(a;0), C(b+a; c). Докажем, что справедливо равенство: $2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + BD^2$.

Найдем квадраты длин соответствующих отрезков по формуле расстояния между точками.

$AB^2 = (\sqrt{(b-0)^2 + (c-0)^2})^2 = b^2 + c^2$; $AD^2 = (\sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2})^2 = a^2$, тогда

$2AB^2 + 2AD^2 = 2(b^2 + c^2) + 2a^2 = 2b^2 + 2c^2 + 2a^2$ (1)

$AC^2 = (\sqrt{(b + a - 0)^2 + (c-0)^2})^2 = (b + a)^2 + c^2 = b^2 + 2ab + a^2 + c^2$,

$BD^2 = (\sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2})^2 = (a-b)^2 + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + c^2$, тогда

$AC^2 + BD^2 = b^2 + 2ab + a^2 + c^2 + a^2 - 2ab + b^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$(2)

Из равенств (1) и (2) следует, что $2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + BD^2$. Что и требовалось доказать.

Два способа решения одной задачи

Чтобы сравнить стандартный геометрический метод решения задач с методом координат, докажем этими методами теорему Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

1). Сначала рассмотрим доказательство геометрическим методом, которое приводится в учебнике.

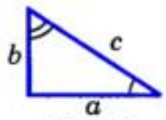


Рис.1

Дан прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис.1). Доказать, что $c^2 = a^2 + b^2$.

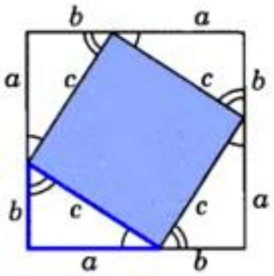


Рис.2

Достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$ так, как показано на рисунке 2. Площадь S этого квадрата: $S = (a + b)^2$.

С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной c, поэтому

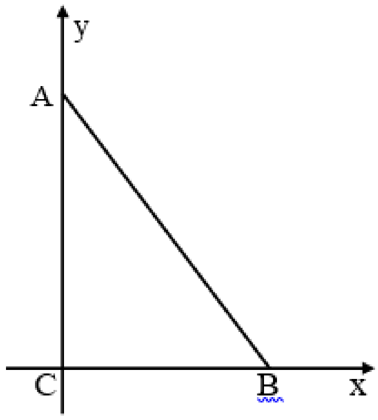
$$S = 4\times\frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2.$$

Приравнивая правые части выражений для площади получим: $(a + b)^2 = 2ab + c^2$.

Откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

Теорема доказана.

2). Теперь докажем эту теорему методом координат.



Свяжем систему координат с прямоугольным треугольником ABC так, как показано на рисунке. Тогда вершины имеют координаты: A(0; a), B(b; 0), C(0; 0).

Найдем квадраты длин сторон по формуле расстояния между точками:

$AB^2 = (\sqrt{(b-0)^2 + (0-a)^2})^2 = b^2 + a^2$;

$AC^2 = (\sqrt{(0-0)^2 + (0-a)^2}) = a^2$;

$CB^2 = (\sqrt{(b-0)^2 + (0-0)^2}\ )^2 = b^2$.

Отсюда получаем, что $AB^2 = AC^2 + CB^2$, т.е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Теорема доказана.

Сравнивая эти два доказательства можем отметить, что в данной задаче применение метода координат целесообразнее. Для того, чтобы доказать теорему первым способом, не просто догадаться, какие дополнительные построения необходимо выполнить. При этом получается, что теорема, в которой сравниваются стороны треугольника (точнее их длины), доказывается через площадь квадрата, частью которого является данный треугольник. Кроме того, приравнивая правые части выражений для площади, не сразу появляется выражение, истинность которого мы доказываем, нужно выполнять дополнительные преобразования.

Для доказательства теоремы методом координат достаточно легко выбрать систему координат. А поскольку в теореме речь идет о сторонах треугольника, то вполне логичным является вычисление и последующее сравнение их длин.

Лично мне метод координат при доказательстве данной теоремы показался более легким, логичным и лаконичным.

Заключение

В данной работе метод координат был рассмотрен как способ решения конкретных геометрических задач на вычисление и на доказательство.

Исследовав этот метод, можно сказать, что он, как и многие другие методы, не является универсальным, такого метода не существует, каждый из методов, по-своему, наиболее применим к той или иной задаче. Тем не менее в некоторых случаях метод координат дает возможность строить доказательства и решать многие задачи более рационально, красиво, чем чисто геометрическими методами. Но нужно помнить, что при решении геометрических задач координатным методом в первую очередь необходим навык алгебраических вычислений. Следует отметить, что рассмотренные примеры задач показывают, что координатный метод является средством решения задач на вычисление, на доказательство, в том числе и теорем.

Подводя итоги выполненной работы, мы пришли к выводу, что наша гипотеза получила подтверждение. Цель работы достигнута.

Список литературы

1. Факультативный курс по математике: Учеб. пособие для 7 – 9 кл. сред. шк./Сост. И.Л.Никольская – М.: Просвещение, 1991
2. Атанасян Л. С. И др. Геометрия 7–9 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2010.
3. Погорелов А. В. Геометрия, уч. Для 7–11 кл. общеобр. Учрежд. – М.: Просвещение, 1996.
4. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989. – 252с.
5. https://zaochnik.com/spravochnik/matematika/vektory/nahozhdenie-serediny-otrezka/ (дата обращения 28.02.2022г.)
6. Свободная энциклопедия (Википедия). https://ru.wikipedia.org