Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
города Абакана «Средняя общеобразовательная школа № 31»

ИСЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА

Тема: «Алгебраические уравнения высшей степени и методы их решения»

Автор:
Итыгина Александра Евгеньевна
ученица 8 класса «Б»

Руководитель:
Болсуновская Ольга Валерьевна,
учитель математики

Абакан, 2023

Содержание

Введение.

Уравнения — одна из сложных тем для усвоения, но при этом они являются достаточно мощным инструментом для решения большинства задач. Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Это объясняется тем, что уравнения широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач.

С помощью уравнений описываются различные процессы, протекающие в природе. Уравнения широко применяются в других науках: в экономике, физике, биологии и химии.

Теория уравнений занимает ведущее место в алгебре и математике в целом. Значимость ее заключается не только в теоретическом значении для познания естественных законов, но и служит практическим целям. Большинство жизненных задач сводится к решению различных видов уравнений, в основном это уравнения второй степени (квадратные уравнения), но существуют и уравнения высшей степени.

В классах с углубленным изучением математики уравнения степени выше второй начинают изучать сразу же после прохождения темы «Квадратные уравнения». В курсе алгебры 8-9 классов – уравнения, которые путем тех или иных преобразований сводятся к квадратным. Чтобы помочь учащимся разобраться в многообразии этих уравнений, я нашла удобные способы их решения. Это облегчает их усвоение, а так же подготавливает учащихся к усвоению темы «Уравнения высших степеней» в 10-11 классах.

Уравнения высших степеней — это уравнения, в которых старшая степень при переменной больше либо равна трём. На данный момент не существует какой-либо единой схемы для решения уравнений высших степеней.

В общем случае уравнение, имеющее степень выше 4-ой, нельзя разрешить в радикалах. Но иногда мы все же можем найти корни многочлена, стоящего слева в уравнении высшей степени, если представим его в виде произведения многочленов в степени не более 4-х. Решение таких уравнений базируется на разложении многочлена на множители.

Изучая пробные версии экзаменов, я заинтересовалась другими способами решения этих уравнений. Поэтому я выбрала тему «Алгебраических уравнений высшей степени и методов их решения».

Актуальность выбранной темы заключается в том, что на уроках алгебры, геометрии, физики мы очень часто встречаемся с решением различных уравнений. Поэтому каждый ученик должен уметь верно и рационально решать уравнения, что также пригодится и при решении более сложных задач, в том числе и при сдаче экзаменов.

Цель проекта: рассмотреть различные методы решения уравнений высших степеней и выявить наиболее удобные способы их решения.

Объект исследования данного проекта – уравнения высших степеней.

В соответствии с целью и объектом данного исследования были выявлены следующие **задачи**:

1. Рассмотреть стандартные и нестандартные методы решения уравнений высшей степени;
2. Выявить наиболее удобные способы решения;
3. Научиться решать уравнения высшей степени различными способами.

Методы исследования:

1. Теоретические: изучение литературы по теме исследования;
2. Изучение тематических Интернет-ресурсов;
3. Анализ полученной информации;
4. Сравнение способов решения уравнений на удобство и рациональность.

Ниже рассмотрены основные методы решения уравнений высших степеней с целыми и рациональными коэффициентами, справедливые для разных степеней.

1. Алгебраические уравнения и их виды.

Уравнение – это математическое выражение, являющееся равенством содержащее неизвестное. Если равенство справедливо для любых допустимых значений входящих в него неизвестных, то оно называется тождеством; например: соотношение вида $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ выполняется при всех значениях x.

Уравнения подразделяются на **две** большие группы: алгебраические и трансцендентные. Алгебраическим называется такое уравнение, в котором для нахождения корня уравнения используются только алгебраические действия, а именно четыре арифметических – сложение, вычитание, умножение и деление, а также возведение в степень и извлечение натурального корня.

В курсе математики основной школы рассматриваются только алгебраические уравнения. Рассмотрим более подробно их виды и алгоритм решения.

Группу алгебраических уравнений можно условно разделить на такие виды уравнений как:

- целые — с обеими частями, состоящими из целых алгебраических выражений по отношению к неизвестным;

- дробные — содержащие целые алгебраические выражения в числителе и знаменателе;
- иррациональные — алгебраические выражения здесь находятся под знаком корня.

Дробные и иррациональные уравнения можно свести к решению целых уравнений.

Существует также и ещё одна классификация, которая основывается на степени, которая имеется в левой части многочлена. Исходя из этого различают такие виды уравнений:

- линейные - уравнения, степень которых равняется одному;
- квадратные – уравнения, степень которых равняется двум;
- кубические - уравнения, степень которых равняется трём.

Процесс отыскания решений уравнения заключается обычно в замене уравнения равносильным. При практическом решении уравнений важно следить за их эквивалентностью. Равносильность гарантируют некоторые аксиомы:

1. Если любой член уравнения перенести в другую часть с противоположным знаком, то результаты будут равны.
2. Если обе части возвести в нечетную или четную степень, то результаты будут равны.
3. Если равные величины увеличить на одно и то же число, то результаты будут равны.
4. Если из равных величин вычесть одно и то же число, то результаты будут равны.
5. Если равные величины умножить на одно и то же число, то результаты будут равны.
6. Если равные величины разделить на одно и то же число, то результаты будут равны.

2. **Уравнения высших степеней**.

Уравнения высших степеней — это уравнения, в которых старшая степень при переменной больше либо равна трём.

Уравнения высших степеней имеют вид: $P(x)=0$, где $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$.

На практике коэффициенты a_0,a_1,a_{0-1}, a_n всегда являются целыми числами, a_0 является старшим коэффициентом, который никогда не равен 0, a_n— свободный член. В таких уравнениях степень больше 2.

Чтобы решить уравнение высшей степени надо найти его корни, или обнаружить, что их нет. Корни представляют собой все значения переменной x, которые приводят многочлен к нулю или верному равенству.

Виды уравнений высшей степени:

1. Приведенные целые рациональные уравнения n-й степени.
2. Неприведенные.
3. Дробные рациональные.
4. Кубические.
5. Четвертой степени.
6. Биквадратные.
7. Симметричные. Признаком симметричных уравнений являются равные коэффициенты у одночленов, которые равноудалены от начала и конца многочлена, записанного в стандартном виде и стоящего в левой части уравнения.
8. Сводящиеся к возвратному.

На сегодняшний день в математике нет общих формул, которые бы подходили для решения уравнений высших степеней разных видов. Существуют различные системы для решения разных видов таких уравнений.

Методы решения уравнений высших степеней:

1. Графический метод.
2. Применение формул сокращенного умножения. Выделение полного квадрата.
3. Метод разложения на множители. Вынесение общего множителя. Группировка.
4. Метод понижения степени. Схема Горнера.

2.1. Графический способ.

Графический метод решения подобных уравнений очень нагляден. Рассмотрев графики функции y=f(x) и y=g(x), входящих в уравнение f(x)=g(x), можно выяснить на какие множества нужно разбить числовую ось, чтобы на каждом из этих множеств использовать свой способ решения и наличие, отсутствие и количество корней в данном уравнении.

Пример №1: Решить уравнение $x^5-3+2x=0$

Решение№1: $x^5=3-2x$.

1) Рассмотрим два графика функции: $y=x^5$ и $y=3-2x$.

2) Построим график функции $y=x^5$.

3) Построим график линейной функции y=3-2x. Это прямая, проходящая через точки (0;3) и (1;1) .

4) Судя по чертежу (см. приложение рис.1), построенные графики пересекаются в точке A(1;1). Проверка показывает, что координаты точки A (1;1) и первому и второму уравнению. Значит, корень уравнения будет всего один: x = 1 – абсцисса точки A.

Ответ: x=1.

2.2. Применение формул сокращенного умножения. Выделение полного квадрата.

Метод основан на использовании формул:

1. Квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Разность квадратов: $a^2- b^2 = (a - b) (a + b)$
4. Куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. Куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$
7. Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$

Пример №2: $a^6+18a^4+108a^2+216=0$

Решение №2: Складываем уравнение по формуле куба суммы.

1) $(a^2+6)^3=0$
2) $a^2+6=0$
3) $a^2=-6$

Ответ: корней нет.

2.3. Метод разложения на множители. Вынесение общего множителя. Группировка.

Данный способ применяют к многочленам, которые не имеют общего множителя для всех членов многочлена. Чтобы разложить многочлен на множители способом группировки, нужно: Объединить члены многочлена в такие группы, которые имеют общий множитель в виде многочлена. Вынести этот общий множитель за скобки.

Пример №3: $x^4-5x^3-16x^2+100x-80=0$

Решение №3: $x^4-5x^3-20x^2+4x^2+100x-80=0$

1) $x^2(x^2-20)-5x(x^2-20)+4(x^2-20)=0$ (нужно догадаться, как сгруппировать)
2) $(x^2-5x+4)(x^2-20)=0$
3) $x^2-5x+4=0$ или $x^2-20=0$

4) D=25-16=9 $x^2=20$

5) $x_1=(5+3)\div2=4x=\pm\sqrt{20}$;

$x_2=(5-3)\div2=-1$

Ответ:$-\sqrt{20}$; -1; 1; $\sqrt{20}$.

2.4. Метод понижения степени. Схема Горнера.

Схема Горнера состоит в том, чтобы также сначала найти какой-либо корень уравнения вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2]}$ $+...+a_{n-1}x+a_n=0$ через делители свободного члена.

После этого составляется специальная таблица с результатами деления на $(x-\alpha)$, в которой каждый член зависим от предыдущего. Коэффициенты из данной таблицы используются как коэффициенты в полученном от деления частного многочлене, они вычисляются по формулам: (см. приложение рис. 2)

Пример №4: $x^3+4x^2+x-6=0$.

Решение №4: Делители свободного члена — ±1;±2;±3;±6.

1) Запишем таблицу со коэффициентами:

	1	**4**	**1**	**-6**
1	1	1·1+4=5	5·1+1=6	6·1+(-6)=0

2.5. Введение новой переменной

Метод введения новой переменной заключается в том, что для решения уравнения f(x) = 0 вводят новую переменную (подстановку) t = x n или t = g(x) и выражают f(x) через t, получая новое уравнение r(t). Решая затем уравнение r(t), находят корни: $(t_1, t_2,\dots, t_n)$. После этого получают совокупность n уравнений $q(x) = t_1$, $q(x) = t_2$, … , $q(x) = t_n$, из которых находят корни исходного уравнения.

Пример №5: $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

Решение №5: $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

1) $(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 3 - 1 = 0$.
2) Замена $(x^2 + x + 1) = t$.
3) $t^2 - 3t + 2 = 0$.
4) $t_1 = 2$, $t_2 = 1$.
5) Обратная замена $x^2 + x + 1 = 2$ или $x^2 + x + 1 = 1$;
6) $x^2+ x - 1 = 0$ или $x^2+ x = 0$;

7) Из первого уравнения: $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{5})/2$, из второго: 0 и -1.

Метод введения новой переменной находит применение при решении возвратных уравнений, то есть уравнений вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, в котором коэффициенты членов уравнения, одинаково отстоящих от начала и конца, равны.

Определение: Возвратное уравнение – это алгебраическое уравнение вида: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с равными друг другу коэффициентами, стоящими на симметричных относительно середины позициях, то есть $a_{n-k} = a_k$, при к $=0,1,\ldots,n$.

3. Заключение.

Исследуя разные методы решения уравнений, я узнала их признаки и особенности. Кроме названных методов решения уравнений высших степеней существуют и другие. Например, выделение полного квадрата, Теорема Виета для степеней, выше, Теорема Безу и другие. Из общих методов решения уравнений высших степеней, которые встречаются чаще всего, используют: метод разложения левой части уравнения на множители, метод замены переменной (метод введения новой переменной) и графический способ.

Я выполнила поставленные мною задачи. Во-первых, я изучила исторические сведения об уравнениях высших степеней. Во-вторых, рассмотрела различные способы решения данных уравнений. В-третьих, научилась решать алгебраические уравнения высших степеней. И, в-четвертых, составила алгоритмы решения данных уравнений. Больше всего мне понравилось решать уравнения с помощью схемы Горнера.

И главное, я выполнила цель работы — подробно изучила алгебраические уравнения высших степеней и выявила наиболее интересные и практичные способы решения. Я рассмотрела много способов решения уравнений высших степеней, но для себя выявила только несколько. Так как некоторые из решений мне были не понятны. Например, решение с помощью метода введения новой переменной я не смогла выполнить, потому что этот материал пока сложен мне для понимания.

Рассмотренные мною методы имеют свои особенности и могут подойти не для всех видов уравнений высших степеней. Я считаю, что схема Горнера — наиболее практичный и экономичный методы решения, который сможет помочь на ОГЭ и ЕГЭ.

Вывод.

На внеурочной деятельности я предоставила своим одноклассникам данный проект, рассказав о важности этой темы. Многие из ребят заинтересовались ей, и я помогла разобраться им с методами решения этих уравнений, а после дала пару уравнений для самостоятельного решения способом, который они лучше всего поняли.

Из данных результатов (см приложение рис. 3) показано, что большинство учеников хорошо усвоили именно метод группировки, а метод введения переменной поняли далеко не многие.

Приложение.

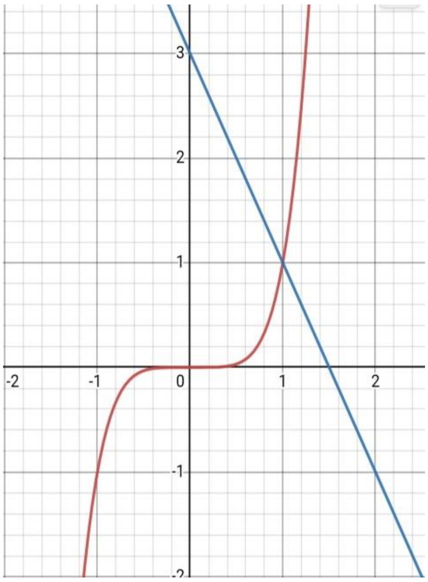

Рис.1.

	a_0	a_1	$a_2,$	…	a_n
α	$b_0=a_0$	$b_1=\alpha b_0+a_1$	$b_2=\alpha b_1+a_2$	…	$r=\alpha b_{n-1}+a_n$

.

Рис. 2.

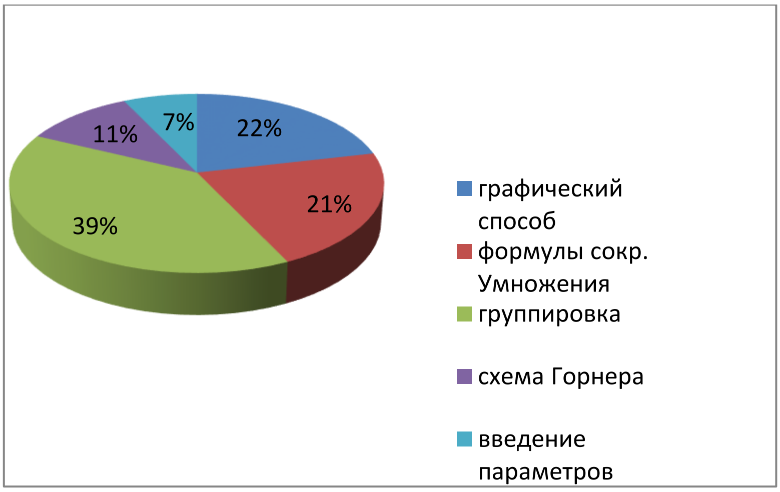

Рис. 3.

Список использованной литературы.

1. Брадис, В.М. Четырехзначные математические таблицы для средней школы/ В.М, Брадис-М.: Просвещение, 1990-83с.
2. Глейзер, Г.И. История математики в школе/ Г.И. Глейзер.-М.:
3. Просвещение, 1982- 340с.
4. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.:
5. МЦНМО, 2004. – 166 с.
6. Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И., «Алгебра и начала анализа». М.: 1 Федеральная книготорговая компения, 1998 – 736 с.
7. http://www.hintfox.com/article/reshenie-yravnenij-visshih-stepenej-
8. razlichnimi-metodami.html
9. http://www.yotx.ru/
10. https://studfiles.net/preview/3973852/