Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №31» города Абакана

Секция математика

Аликвотные дроби.

Автор:
Марина Анастасия Юрьевна,
ученица 7 класса

Руководитель:
Болсуновская Ольга Валерьевна,
учитель математики

Абакан, 2022

Оглавление

Введение…………………………………………………………………… 2

1.Происхождение и история аликвотных дробей………………………. 3

1.1. Папирус Ринда………………………………………………………… 4

1.2. Клавдий Птолемей……………………………………………………4

1.3. Алгоритм Фибоначчи……………………………………………. 4

2.Аликвотные струны……………………………………………………5

3.Иероглифы……………………………………………………………...5

3.1. Глаз Хора………………………………………………………... 6

4.Основные операции над аликвотными дробями…………………………… 7

5.Задачи с использованием аликвотных дробей……………………………9

6.Эксперимент……………………………………………………………11

7.Заключение…………………………………………………………...12

8.Список литературы……………………………………………………. 13

Введение

Актуальность темы: При изучении обыкновенных и десятичных дробей, меня заинтересовало, а есть ли еще какие-то дроби. Как возникли обыкновенные дроби? Когда от учителя я услышала о таких дробях, как аликвотные дроби и меня заинтересовало это понятие. Я решила узнать, что это за дроби? Когда они возникли? В данной работе мы проведем исследование аликвотных дробей, основных операций с ними, узнаем историю их происхождения и разберем методы решения, которые чаще всего встречаются не только в школьном курсе по математике и помогают решать олимпиадные задачи более рациональными способами, применяется в различных областях науки.

Объект исследования: аликвотные дроби

Предмет исследования: основные операции с аликвотными дробями.

Цель исследования: изучить аликвотные дроби.

Задачи исследования:

1) узнать происхождение аликвотных дробей.

2) рассмотреть основные операции с аликвотными дробями.

3) решить олимпиадные задачи с помощью аликвотных дробей

4) Изучить литературу по теме, включая исторические сведения.

Практическая значимость исследования: с помощью аликвотных дробей можно решать сложные олимпиадные задачи.

Гипотеза исследования: аликвотные дроби часто используются при решении задач и в окружающем нас мире.

Методы исследования:

1.Изучение информационных источников: историческая и научная литература, энциклопедические словари, интернет-источники.

2. Обобщение экспериментального и теоретического материала, рефлексивное осмысливание результатов сформулированных свойств.

3. Решение задач с использованием аликвотных дробей и их свойству.

Аликвотные дроби

***Происхождение аликвотных дробей*.**

Аликвота - (лат. aliquoties, «несколько раз или несколько частей»)

Аликвотная дробь- дробь, числитель которой равен единице.

Аликвотные дроби начали использоваться ещё в древности. Необходимость в дробных числах возникла в результате практической деятельности человека. Потребность в нахождении долей единицы появилась у наших предков при дележе добычи после охоты. Второй существенной причиной появления дробных чисел следует считать измерение величин при помощи выбранной единицы измерения.

Первые дроби, с которыми нас знакомит история, это дроби вида – 1/2, 1/3, 1/4 – так называемые единичные дроби, так как числитель этих дробей единица. Причиной появления этих дробей являлась необходимость разбить единицу на доли. Это нужно было для того:

1, чтобы разделить добычу после охоты, ведь, нужно было знать, сколько частей составляет целое и кому какая часть добычи станет принадлежать.

2. выразить результат измерения длины, времени, площади, массы и вести расчеты за товары

Аликвотные дроби в Древнем Египте:

Аликвотные дроби появились раньше других дробей. В Древнем Египте математики «настоящими» считали только аликвотные дроби вида 1/n.

Итак, дроби вида 1/n, где числитель 1, а n – натуральное число, (т.е. число, которое используется для счёта предметов), называются аликвотными дробями (от латинского aliguot-«несколько») или единичными.

Например: 8/15 =1/3+1/5,

1/2 = 1/3+1/6,

1/4 = 1/5+1/20,

3/4 = 1/2+1/4,

2/11 = 1/6+1/66,

2/7 = 1/6+1/14+1/21,

2/13 = 1/8+1/52+1/104

Итак, Египтяне все дроби записывали как суммы долей, то есть дробей вида 1/n.

Египетские дроби были изобретены и впервые использованы в древнем Египте. Одним из первых известных упоминаний о египетских дробях является Математический папирус Ринда. Три более древних текста, в которых упоминаются египетские дроби — это Египетский математический кожаный свиток, Московский математический папирус и Деревянная табличка Ахмима. Папирус Ринда был написан писцом Ахмесом в эпоху Второго переходного периода; он включает таблицу египетских дробей для рациональных чисел вида 2/n, а также 84 математических задачи, их решения и ответы, записанные в виде египетских дробей.

Египетские дроби продолжались использоваться в древней Греции и впоследствии математиками всего мира до средних веков, несмотря на имеющиеся к ним замечания древних математиков. К примеру, Клавдий Птолемей говорил о неудобстве использования египетских дробей по сравнению с Вавилонской системой (позиционная система исчисления)

Важную работу по исследованию египетских дробей провёл математик XIII века Фибоначчи в своём труде «Liber Abaci» - это вычисления, использующие десятичные и обычные дроби, вытеснившие со временем египетские дроби. Фибоначчи использовал сложную запись дробей, включавшую запись чисел со смешанным основанием и запись в виде сумм дробей, часто использовались и египетские дроби. Также в книге были приведены алгоритмы перевода из обычных дробей в египетские.

<u>Основная мысль Алгоритма Фибоначчи:</u>

Первый, дошедший до нас общий метод разложения произвольной дроби на египетские составляющие описал Фибоначчи в XIII веке. В современной записи его алгоритм можно изложить следующим образом.

http://www.ucheba.ru/referats/8521.html

1. Дробь разлагается на 2 слагаемых:

Здесь -- частное от деления n на m, округлённое до целого в большую сторону, а -- (положительный) остаток от деления -n на m.

2. Первое слагаемое в правой части уже имеет вид египетской дроби. Из формулы видно, что числитель второго слагаемого строго меньше, чем у исходной дроби. Аналогично, по той же формуле, разложим второе слагаемое и продолжим этот процесс, пока не получим слагаемое с числителем 1.

Метод Фибоначчи всегда сходится после конечного числа шагов и даёт искомое разложение.

Однако полученное таким методом разложение может оказаться не самым коротким. Пример его неудачного применения: в то время как более совершенные алгоритмы приводят к разложению.

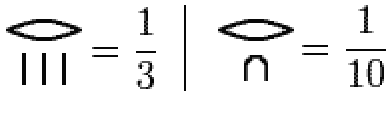
Аликвотные струны:

Аликвотные дроби применятся и в жизни. В ходе работы я узнала, что бывают аликвотные струны, чаще всего их называют резонансовыми струнами. Это дополнительные струны, к которым исполнитель не прикасается во время игры. Резонансовые струны само возбуждаются от колебания игровых струн, служат для усиления их звучания и для обогащения тембровых возможностей инструмента. Эти струны размещаются под грифом, сбоку или под игровыми струнами. Встречаются у многих индийских инструментов, у хардингфеле, у некоторых виолончелей http://www.josef-egipetsky.narod.ru/Slovar/Music_s/21r26rezonans_st.htm

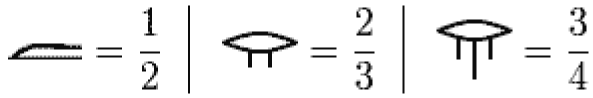
Иероглифы:

Египтяне ставили иероглиф

(*ер*, «[один] из» или *ре*, рот) над числом для обозначения единичной дроби в обычной записи, а в священных текстах использовали линию. К примеру:

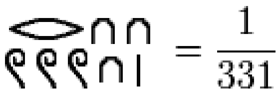


У них также были специальные символы для дробей 1/2, 2/3 и 3/4, которыми можно было записывать также другие дроби (большие, чем 1/2).



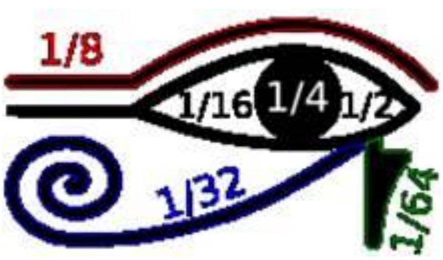
Египтяне использовали также и другие формы записи, основанные на иероглифе Глаз Хора для представления специального набора дробей вида 1/2k (для k = 1, 2, …, 6), то есть, двухэлементных рациональных чисел. Такие дроби использовались вместе с другими формами записи египетских дробей для того, чтобы поделить хекат, основную меру объёма в Древнем Египте. Эта комбинированная запись также использовалась для измерения объёма зерна, хлеба и пива. Если после записи количества в виде дроби Глаза Хора оставался какой-то остаток, его записывали в обычном виде кратно ро, единице измерения, равной 1/320 хеката.

Например, так:



При этом «рот» помещался перед всеми иероглифами.

Глаз Хора:



Он представлял собой дробь 63/64.

Согласно мифам глаз Хора, был выбит, а затем восстановлен. Каждая часть глаза соответствовала определённой дроби и была представлена в виде суммы аликвотных дробей таким образом: + + + + + =.

Основные дробями операции над аликвотными

Чтобы представить какое-либо число в виде суммы аликвотных дробей, порой приходится проявлять, незаурядную изобретательность. Скажем, число 2/43 выражается так: 2/43= 1/42 +1/86 +1/129 +1/301.Производить арифметические действия над числами, раскладывая их в сумму долей единицы, очень неудобно.

Поэтому в процессе решения задач для разложения аликвотных дробей в виде суммы меньших аликвотных дробей возникла идея систематизировать разложение дробей в виде формулы. Эта формула действует, если требуется разложение аликвотной дроби на две аликвотные дроби.

Формула выглядит следующим образом:

$1/n=(1/(n+1)) +(1/n*(n+1))$

Примеры разложения дробей:

$1/3=1/ (3+1) +1/3*(3+1) =1/4 +1/12;$

$1/5=1/ (5+1) +1/5*(5+1) =1/6 +1/30;$

$1/8=1/ (8+1) +1/8*(8+1) =1/9+ 1/72.$

Но если преобразовать нашу формулу, то получим следующее полезное равенство:

$1/(n*(n+1)) =1/n -1/(n+1)$

$1/6=1/ (2*3) =1/2 -1/3$

$½=1/ (1*2) =1/1 -1/2$

Т.е. аликвотную дробь можно представить разностью двух аликвотных дробей, или разность двух аликвотных, знаменателями которых, являются последовательные числа равные их произведению.

Вернемся к формуле и докажем это равенство:

$$1/n=(1/(n+1)) +(1/n*(n+1))$$

$(1/(n+1)) +(1/n*(n+1))$, приведя дроби к общему знаменателю, получаем:

$(n+1)/((n+1) *n)$ после сокращения получаем:

$1/n.$

Итак, получается, что 1/n=1/n. Наша формула верна.

Но мы пойдем дальше, и на основании разности аликвотных дробей решим, на первый взгляд, трудноразрешимую для обычного человека задачу:

1/2+1/ (2*3) +1/ (3*4) +1/ (4*5) +……+1/ (19*20) =????

Воспользуемся нашей формулой для разложения аликвотной дроби в виде разности:

½=1/ (1*2) =1/1 -1/2

1/6=1/ (2*3) =1/2-1/3

1/12=1/ (3*4) =1/3-1/4

1/20=1/ (4*5) =1/4-1/5 и т.д.

Подставив, уже разложенные выражения в наш пример, получаем:

1/1-1/2+1/2-1/3+1/3-1/4+1/4-1/5……+1/19-1/19-1/20=1/1-1/20=19/20.

Мы представили формулу, как удобство при разложении аликвотной дроби на 2 слагаемых. При разложении 1 на два слагаемых получается:

1=1/2+1/2 (Наша формула действует!). Чтобы разложить 1 на 3 слагаемых, мы возьмем одну аликвотную дробь и по формуле разложим ее еще на две аликвотные дроби:

½=1/3+1/6 =½=1/3+1/6 => 1=1/2+1/3+1/6;

Чтобы разделить на 4 слагаемых, делим еще одну дробь на две аликвотные дроби:

1/3=1/4+1/12 => 1=1/2+1/4+1/12+1/6;

На 5 слагаемых: 1/6=1/7+1/42 => 1=1/2+1/4+1/12+1/7+1/42.

Задачи с использованием аликвотных дробей

Решение задач из учебника

Задача: Представить число 1 в виде сумм различных аликвотных дробей

А) трех слагаемых

1=1/2+1/2=1/2+(1/3+1/6) =1/2+1/3+1/6

Б) четырех слагаемых

1=1/2+1/2=1/2+(1/3+1/6) =1/2+1/3+1/6=1/2+1/3+(1/7+1/42) = 1/2+1/3+1/7+1/42

В) 5-и слагаемых

1=1/2+1/2=1/2+(1/3+1/6) =1/2+1/3+1/6=1/2+1/3+(1/7+1/42) = 1/2+1/3+1/7+1/42=1/2+(1/4+1/12) +1/7+1/42=1/2+1/4+1/12 +1/7+1/42

Задача: Митя обнаружил, что 1/n часть класса написала работу лучше него, а 1/(n-1) часть класса – хуже него. Сколько учеников в классе?

Если 1/n написало лучше, а 1/(n-1) хуже. В идеале никто не написал работу также, как и он, но с таким же результатом могло быть и большее количество учеников.

За нескольких сказать ничего не могу, а за одного: Мы можем взять число всех учеников классе за 1. И тогда получается, что мы должны разложить число 1 на 3-и аликвотные дроби.

1=1/n+1/(n-1) +1/x

1/x=1/n*(n-1) тогда получается, что в классе n*(n-1) учеников.

1=1/(n-1) +1/n+1/(n*(n-1))

Методом подбора мы видим, что 1 раскладывается на аликвотные дроби только следующим образом:

1=1/2+1/2=1/2+1/3+1/6 во всех других случаях мы не сможем получить из суммы других аликвотных дробей 1.

Так что, в случае, если он один написал работу с таким результатом, можно утверждать, что в классе 6 человек.

А если таких учеников было несколько, то задача имеет множество решений.

$1/x=(n*(n-1)-n - n+1)/(n*(n-1))$

Решение олимпиадных задач

Задача: Найди сумму

$1/ (10*11) +1/ (11*12) +\ldots+1/ (98*99) +1/ (99*100) =?$

Чтобы найти решение данной задачи необходимо найти сумму

$1/ (1*2) +1/ (2*3) +\ldots+1/ (98*99) +1/ (99*100) =99/100$

И вычесть из нее сумму

$1/ (1*2) +1/ (2*3) +\ldots+1/ (8*9) +1/ (9*10) =9/10$

$99/100-9/10= (99-90)/100=9/100=0.09$

Задача. Найти сумму

$1/2 +1/6+1/12+1/20+1/30+1/42+1/56+1/72+1/90= ?$

a) 1, b) 10/11, c) 4/5, d) 8/9, e) 9/10

$1/ (1*2) +1/ (2*3) +1/ (3*4) +1/ (5*6) +1/ (6*7) +1/ (7*8) +1/ (8*9) +1/ (9*10) =9/10$

Ответ: е

Задача: Чтобы узнать в каком году в Казани будет проводиться Универсиада нужно сумму аликвотных дробей

$1/ (1*2) +1/ (2*3) +1/ (3*4) +\ldots+1/ (2013*2014)$ умножить на год проведения зимних олимпийских игр в городе Сочи.

Решение:

$1/ (1*2) +1/ (2*3) +1/ (3*4) +\ldots+1/ (2013*2014) =2013/2014$

$2013/2014 * 2014 = 2013$

Ответ: Универсиада будет проводиться в 2013 году

Задача: Найдите все возможные наборы чисел a, b и c, среди которых есть равные и верно равенство: а) 1 2 = 1 a + 1 b + 1 c; б) 1 3 = 1 a + 1 b + 1 c. [*]

Ответ. а) {3, 12, 12}; {4, 8, 8}; {5, 5, 10}; {6, 6, 6}; б) {4, 24, 24}; {5, 15, 15}; {6, 12, 12}; {7, 7, 21}; {9, 9, 9}.

Эксперимент

На внеурочной деятельности по математике я предложила моим одноклассникам решить задачу: Разделите 7 хлебов между 8 людьми.

На решение задачи у них ушло большое количество времени, а кто-то вовсе не решил ее.

10% - решили задачу не более чем за 5 минут

40% - решили задачу, потратив на нее более 10 минут

50% - не решили задачу

Тогда я рассказала им об аликвотных дробях и предложила решить эту же задачу только с помощью аликвотных дробей. В этот раз результаты были намного лучше.

60% - самостоятельно справились с заданием

30% - справились с заданием с моей помощью

10% - не справились с заданием

Вывод: зная метод решения задач с помощью аликвотных дробей, мы можем во много раз сократить количество времени, потраченное на задачу и грамотнее ее решить.

Заключение.

За время работы над данной темой, я узнала, что первыми дробями, которыми владели люди, были аликвотные. Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач. Аликвотные дроби помогают нам что-то разделить, при этом используя наименьшее количество действий. Решив проблему разложения аликвотных дробей на две аликвотные дроби, мы пришли к выводу, что разложение на три, четыре, пять и т.д. аликвотных дробей можно произвести, разложив одно из слагаемых на две дроби, следующее слагаемое еще на две аликвотные дроби и т.д.

Выдвинутая нами гипотеза оказалась верна: аликвотные дроби часто бывают более удобными при решении задач и применяются в окружающем нас мире в разных областях, а не только в математике.

На этом работа над данной темой не заканчивается. Нам бы хотелось рассмотреть, разложение любого рационального числа, а/ в, а также составить сборник задач.

Список литературы

- *Ван дер Варден.* Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. Перевод с голландского Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959, 456 с. (Репринт: М.: УРСС, 2007)
- *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук (Догреческая математика). Т. 1. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
- *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. М.: Наука, 1968. (Репринт: М.: УРСС, 2003)
- *Раик А. Е.* Очерки по истории математики в древности. Саранск, Мордовское гос. изд-во, 1977.
- *Раик А. Е.* К истории египетских дробей. Историко-математические исследования, 23, 1978, с. 181—191.
- *Яновская С. А.* К теории египетских дробей. Труды Института истории естествознания, 1, 1947, с. 269—282.
- *Beeckmans, L.* The splitting algorithm for Egyptian fractions (неопр.) // Journal of Number Theory. — 1993. — Т. 43. — С. 173—185.
- *Botts, Truman.* A chain reaction process in number theory (неопр.) // Mathematics Magazine. — 1967. — С. 55—65.
- *Breusch, R.* A special case of Egyptian fractions, solution to advanced problem 4512 (англ.) // American Mathematical Monthly : journal. — 1954. — Vol. 61. — P. 200—201.
- *Bruins, Evert M.* Platon et la tabl égyptienne 2/n (неопр.) // Janus. — 1957. — Т. 46. — С. 253—263.
- *Eves, Howard.* An Introduction to the History of Mathematics, (англ.). — Holt, Reinhard, and Winston, 1953.
- *Gillings, Richard J.* Mathematics in the Time of the Pharaohs (неопр.). — Dover, 1982.
- *Graham, R. L.* On finite sums of reciprocals of distinct *n*th powers (англ.) // Pacific Journal of Mathematics : journal. — 1964. — Vol. 14, no. 1. — P. 85—92.

Архивировано 22 ноября 2009 года. Архивная копия от 22 ноября 2009 на Wayback Machine

- *Hultsch, Friedrich.* Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung (нем.). — Leipzig: S. Hirzel, 1895.
- *Knorr, Wilbur R.* Techniques of fractions in ancient Egypt and Greece (англ.) // Historia Mathematica (англ.) (рус. : journal. — 1982. — Vol. 9. — P. 133—171.
- *Lüneburg, Heinz.* Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers (нем.). — Mannheim: B. I. Wissenschaftsverlag, 1993.
- *Martin, G.* Dense Egyptian fractions (англ.) // Transactions of the American Mathematical Society. — 1999. — Vol. 351. — P. 3641—3657.
- *Menninger, Karl W.* Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers (англ.). — MIT Press, 1969.
- *Robins, Gay; Shute, Charles.* The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text (англ.). — Dover, 1990.
- *Stewart, B. M.* Sums of distinct divisors (неопр.) // American Journal of Mathematics. — 1954. — Т. 76. — С. 779—785.
- *Stewart, I.* The riddle of the vanishing camel (англ.) // Scientific American. — Springer Nature, 1992. — No. June. — P. 122—124.
- *Struik, Dirk J.* A Concise History of Mathematics (неопр.). — Dover, 1967. — С. 20—25.
- *Takenouchi, T.* On an indeterminate equation (неопр.) // Proc. Physico-Mathematical Soc. of Japan, 3rd ser.. — 1921. — Т. 3. — С. 78—92.
- *Tenenbaum, G.; Yokota, H.* Length and denominators of Egyptian fractions (неопр.) // Journal of Number Theory. — 1990. — Т. 35. — С. 150—156.
- *Vose, M.* Egyptian fractions (неопр.) // London Mathematical Society. — 1985. — Т. 17. — С. 21.
- *Wagon, S.* Mathematica in Action (неопр.). — W.H. Freeman (англ.) (рус., 1991. — С. 271—277.

1.Энциклопедический словарь юного математика для среднего и старшего школьного возраста. М.: Педагогика,1989.

1. Левитас Г. Г. Нестандартные задачи по математике.– М.: ИЛЕКСА,2007.
2. Баженов И.И., Порошкин А.Г. и др. Задачи для школьных математических кружков. Сыктывкар, 1994.
3. Гаврилова Т. Д. «Занимательная математика». 5-11класс. Волгоград: Учитель, 2008.
4. Фарков А. В. Математические олимпиады в школе. 5-11класс. – М.: Айрис-пресс, 2005.
5. Петерсон Л. Г. Математика. 5класс. – М.: Ювента, 2009.

Ссылки[править | править код]

- *Дэвид Эпштейн*. Egyptian Fractions. Архивировано 19 февраля 2012 года.
- Egyptian fractions. Архивировано 19 февраля 2012 года.
- Mathematics in Egyptian Papyri (2000). Архивировано 19 февраля 2012 года.
- *Weisstein, Eric W.* Egyptian Fraction (англ.) на сайте Wolfram MathWorld.
- *Браун, Кевин.* RMP 2/nth table (недоступная ссылка). Дата обращения: 24 декабря 2006. Архивировано 16 октября 2006