Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение города Абакана
«Средняя общеобразовательная школа № 31»

Секция математика

Нахождение уравнения функций листьев растений

Выполнил:
Слюта Даниил Павлович,
ученик 11 «Б» класса
МБОУ «СОШ № 31»
Руководитель:
Резванцева Наталья Валерьевна,
учитель математики

Абакан, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение

Л.Вышеславский

ФОРМУЛА ЦВЕТКА

Сплелись в клубок запутанные
трассы
Рабочих пчел, и оводов, и ос.
Разгул цветов.
Сплошное буйство красок.
Неразбериха полная.
Хаос.
Но это только кажется снаружи.
Лишь озарясь познания огнем,
Мы изнутри порядок обнаружим,
Строжайший строй в нестройности найдем.
И станет ясным листьев бормотанье,
И пляска пчел у тесного летка,
И, разглядев растения,
Математик
Изобразит нам
Формулу цветка.

Читая это стихотворение, мы еще раз убеждаемся, как разнообразен мир растений, как сложны и непохожи друг на друга формы различных цветов и листьев. Но это только на первый взгляд. На самом же деле, если быть внимательным, нетрудно заметить, что очертания листьев многих растений, даже принадлежащих к разным видам, чем-то похожи друг на друга, имеют правильную геометрическую форму и представляют собой график какой-то функции. Поставим перед собой цель – нахождение уравнения, ее задающего.

Задачи исследования: найти уравнения функций, описывающих очертания листьев растений; построить полученные уравнения функций; найти общие закономерности в построениях графиков листьев.

Объект исследования: интерполяция функций

Предмет исследования: уравнения функций листьев растений

Методы исследования: теоретические (работа с данными, моделирование) и эмпирические (измерение, сравнение).

Гипотеза: предполагается, что для листьев растений можно найти график, задающий их.

II. Формулы листьев и лепестков

Лепестки розы

Форма листьев растений представляет собой замкнутую кривую, и функцию, ее задающую, удобнее всего представить в полярной системе координат. То есть мы будем искать зависимость радиус – вектораρ от угла φ.

$$\rho = f(\varphi)$$

Для начала рассмотрим семейство кривых, само название которых говорит о том, что они имеют отношение к выбранной теме. Это РОЗЫ. Общий вид уравнения, задающего их:

$$\rho = a\cos \mathrm{k}\varphi$$

Правая часть этого уравнения не может превышать величины a, следовательно кривая умещается внутри круга с радиусом равным a. Далее, так как функция cos kφ является функцией периодической, то РОЗА состоит из одинаковых лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a. При k нечетном количество этих лепестков равноk, при k четном $2k$. Докажем последнее предложение.

Модуль радиус – вектора принимает максимальное значение, когда

coskφ = 1 илиcoskφ = -1. При этом kφ = πn / k [1, с. 85]. Конкретные значения угла φ следующие:

$\varphi_1 = \pi / k$, $\varphi_2 = 2\pi / k$, . . . $\varphi_i = i\pi / k$, . . . $\varphi_{2k} = 2k\pi / k = 2\pi$

Рассмотримуглы iπ /k и iπ /k + π.

ρ (iπ /k) = cos iπ /k·k = cos iπ

$\rho\ (i\pi/k + \pi) = \cos\ (i\pi + \pi k) = \cos i\pi \cdot \cos \pi k + \sin i\pi \cdot \sin \pi k = \cos i\pi \cdot \cos \pi k$

1) При k четном $\cos \pi k = 1 \rightarrow \cos i\pi \cdot \cos \pi k = \cos i\pi$, т.е.

$\rho\ (i\pi/k) = \rho\ (i\pi/k + \pi)$

Приkнечетномcosπk = -1 $\rightarrow$ cosi$\pi \cdot$ cosπk = - cosiπ , т.е.

$\rho\ (i\pi/k) = -\rho\ (i\pi/k + \pi)$

В первом случае мы для двух любых из рассматриваемых максимальных радиусов, лежащих на одной прямой, получаем по два значения функции. И так как количество этих радиусов 2k, то и количество лепестков будет 2k.

Во втором же случае мы для двух таких же радиусов получаем лишь одно значение функции, т.к. они совпадут, и количество лепестков будет равно k.

Проиллюстрируем это на примерах.

Рассмотрим два цветка диаметром 10 см, число лепестков первого равно – 12, второго – 5. Функции, их описывающие будут иметь вид:

$\rho = 5 \cos 6\varphi$– 12 лепестков

$\rho = 5 \cos 5\varphi$ – 5 лепестков

Используя программу EXEL составим таблицу зависимости $\rho\ (\varphi)$ (см. Приложение 1).

$\rho = f\,(\varphi)$

ЛИСТЬЯ ФИАЛКИ, МОЛОДОГО ОГУРЦА, ЯБЛОНИ

Перейдем к нахождению функций, описывающих листья растений. В подавляющем большинстве случаев контур листа представляет собой замкнутую кривую, симметричную относительно оси, поэтому искомая функция должна быть четной. Представим ее в полярной системе координат в виде:

$\rho = f\,(\cos \varphi)$

Полярную ось положим совпадающей с осью симметрии листа. Решая поставленную задачу примем за основу функцию

$\rho = a + b\cos \varphi$

При a = b графиком этой функции является кардиоида (см. Приложение 2). Ее форму часто напоминают многие листья. Для получения более точного результата добавим к вышеуказанному уравнению еще два слагаемых и будем искать функцию, описывающую данный лист в следующем виде:

$\rho = a + b\cos\varphi + c\cos 2\varphi + d\cos 3\varphi$

Неизвестные коэффициенты a, b, c и d находятся с помощью специальной компьютерной программы, основанной на методе наименьших квадратов. Суть его в том, что сумма квадратов разностей между значением ρi, полученным измерением и значением функции, найденным теоретически должна принимать наименьшее значение. Таким образом, задача нахождения уравнения листа свелась к определению его общего вида и снятия с листа исходных данных. Для этого он помещается в полярную систему координат так, что бы его ось совпала с полярной. Полюс O можно выбрать произвольно, в пределах разумного. Так как функциональная зависимость между ρ и φ, как уже было сказано выше, является четной, достаточно рассматривать угол от 0 до π. Этот угол разбивается на n частей, не обязательно равных, и определяются длины образовавшихся отрезков ρi, соответствующих углам φi. Полученные данные записываются в виде двух одномерных массивов, которые помещаются в исходные данные программы.

ПРИМЕР. Рассмотрим рисунок 2 (см. Приложение 2). Это лист фиалки, он действительно напоминает кардиоиду. Функцию, его задающую будем искать в виде:

$\rho = a + b\cos\varphi + c\cos 2\varphi + d\cos 3\varphi$

Для определения a, b, c и d сделаем необходимые измерения ρ и φ:

ρ[16] = (45.2, 45, 43, 40, 38, 34.2, 31, 27, 22, 18, 14.5, 11.2, 7.2, 4.2, 2.8, 1.3)

φ[16] = (0, 0.1570, 0.3141, 0.4712, 0.6283, 0.7854, 0.9424, 1.0995, 1.2566, 1.4137, 1.5708, 1.7278, 1.884, 2.0420, 2.1991, 2.3562)

Занесем экспериментальные данные в программу и после завершения ее работы напишем уравнение, описывающее лист фиалки:

$\rho = 17{,}79 + 23{,}62 \cos\varphi + 3{,}58 \cos 2\varphi – 0{,}1 \cos 3\varphi$.

Рассуждая и действуя так же, как и описано в приведенном примере, найдем какими уравнениями можно описать молодые листья огурца и яблони (см. Приложение 3). Соответственно они имеют вид:

$\rho = -16{,}69 + 57{,}55 \cos\varphi – 16{,}13 \cos 2\varphi + 13{,}81 \cos 3\varphi$

$\rho = -1{,}33 + 48{,}70 \cos\varphi – 1{,}37 \cos 2\varphi + 7{,}02 \cos 3\varphi$

Листья сирени и тополя

При углах φ близких к нулю их косинусы близки к единице и мало отличаются друг от друга. Для примера рассмотрим угол $\varphi = 6°$.

$\cos\varphi = 0{,}9945 \quad \cos 2\varphi = 0{,}9781 \quad \cos 3\varphi = 0{,}9511$

Иесли$\rho\ (0) = a + b \cos\varphi + c \cos 2\varphi + d \cos 3\varphi = a + b + c + d$, то

$\rho\ (6°) = a + 0{,}9945b + 0{,}9781c + 0{,}9511d$

Эти значения почти равны между собой и поэтому около 0 функция

$\rho = a + b \cos\varphi + c \cos 2\varphi + d \cos 3\varphi \qquad (1)$

в пределах нескольких градусов напоминает окружность (см. Приложение 3). И листья, вытянутые при $\varphi = 0$, начиная с угла, соответствующего точке перегиба, то есть точки, в которой форма листа меняется с выпуклой на вогнутую, и до 0 этим уравнением описывается с плохой точностью. На рис. 6 пунктиром показано, что должно быть и что получается в интервале от нуля до девяноста градусов (см. Приложение 3). Чтобы увеличить точность, к уравнению (1) надо добавить слагаемое, представляющее собой некоторую четную функцию от φ, такую, чтобы она резко увеличивала радиусы от точки перегиба и до нуля, остальные же меняла незначительно (речь пока идет только об интервале от нуля до девяноста градусов).

Это может быть функция $\rho = a\cos^n \varphi$. Исследуем ее на экстремумы и точки перегиба в интервале $[\ 0;\ \pi\ ]$. Для нахождения этих точек будем находить производную от первой производной и приравнивать ее к 0.

Функция выпуклая, когда вторая производная отрицательная и вогнутая, когда она положительная.

Предположим, что n – нечетное.

Функция определена на всем исследуемом интервале.

$\rho' = -a\,n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi$.

$\rho'(0) = 0 \rightarrow \varphi = \pi/2,\ \varphi = 0,\ \varphi = \pi$

ρ' + - - +

0 π/2 π

$\rho(0) = a$ $\rho(\pi/2) = 0$ $\rho(\pi) = -a$

$\rho'' = an((n-1)(\cos^{n-2}\varphi)(-\sin\varphi)(-\sin\varphi) + (\cos^{n-1}\varphi)(-\cos\varphi))$

$\rho'' = an((n-1)(\cos^{n-2}\varphi)\sin^2\varphi - \cos^n\varphi) = 0$

$\cos^{n-2}\varphi\,((n-1)\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = 0$

$\cos^{n-2}\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \pi/2$

$(n-1)\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = 0$

$(n-1)\sin^2\varphi - (1-\sin^2\varphi) = 0$

$n\sin^2\varphi = 1 \rightarrow \sin^2\varphi = 1/n \rightarrow \varphi = \arcsin 1/\sqrt{n} \quad \varphi = \pi - \arcsin 1/\sqrt{n}$

ρ- - + - + +

0 $\arcsin 1/\sqrt{n}$ π/2 π-$\arcsin 1/\sqrt{n}$ π

Используя полученные данные построим график функции $\rho = a\cos^n\varphi$ при n нечетном (см. Приложение 4).

Измерением можно найти угол φ при котором происходит перегиб, то есть лист меняет свою форму с выпуклой на вогнутую, n вычислим по формуле:

$n=1/\sin^2\varphi$

Для дальнейших вычислений берется его целая часть или число на 1 большее. Таким образом, чтобы n было нечетным. Используя полученные сведения попытаемся описать лист сирени (см. Приложение 4). Измерением определим угол φ, при котором происходит перегиб, φ = 7°.

$n=1/\sin^2 7° \approx 70$

Примем n = 71. Добавим слагаемое $c\cos^{71}\varphi$ к уравнению $\rho = a + b\cos\varphi$ и получим общий вид функции с помощью которой мы можем описать лист сирени.

$\rho = a + b\cos\varphi + c\cos^{71}\varphi$

Как видно из графика рис. 7, третье слагаемое этого уравнения дает то, что при $\varphi \to 0$ полученная функция вытягивается в сторону увеличения радиуса, а при $\varphi \to \pi$ в сторону его уменьшения. Для выбранного листа имнно это и требуется. Определив неизвестные коэффициенты получаем уравнение листа сирени.

$\rho = 24{,}32 - 0{,}66\cos\varphi + 3{,}97\cos^{71}\varphi$

Поступая аналогично предыдущему построим график зависимости значений функции $a\cos^{n}\varphi$ от φ при n четном.

ρ' + - + -

0 π/2 π

$\rho(0) = a\rho(\pi/2) = 0$ $\rho(\pi) = a$

ρ'' - - + + - -

0 $\arcsin 1/\sqrt{n}\,\pi/2$ $\pi - \arcsin 1/\sqrt{n}\,\pi$

Используя полученные данные построим график функции $\rho = a\cos^{n}\varphi$ при n четном (см. Приложение 4).

Из рисунка видно, что при добавлении $a\cos^{n}\varphi$ при n четном к какой либо функции мы получим ее вытягивание в сторону возрастания радиуса при углах близких к 0 и π. Удлинение будет равно a. Это можно использовать при определении уравнения листа тополя (см. Приложение 4). Оно имеет вид:

$\rho = 16{,}40 - 0{,}46\cos\varphi + 8{,}96\cos^{70}\varphi$

Лист гороха

Довольно часто приходится сталкиваться с листьями вытянутыми лишь в одну сторону. В этом случае функцию, их определяющую можно задать в виде двух уравнений. Например, лист гороха на интервале [63°; 180°] представляет собой окружность с радиусом 13, а [0; 63°] наблюдается резкое увеличение радиуса, которое можно получить, добавив к уравнению окружности слагаемое а $\cos^7\varphi$, где а находится простым измерением. Оно равно 3. Исходя из этого, искомую функцию можно записать в следующем виде:

$\rho = 13 + 3\cos^7\varphi$ если φ изменяется [0; 63°]

$\rho = 13 + 3\cos^7 63°$ если φ изменяется [63°; 180°]

При задании функции, описывающей такой лист, можно обойтись и одним уравнением. Для этого надо к уравнению окружности добавить функцию, график которой изображен на рис. 11(см. Приложение 5). Эта функция может быть получена если взять за основу обратно пропорциональную зависимость между ρ и φ. Ее уравнение имеет вид:

$\rho = a / (|\varphi| + 1)$

Примем а равным 5 и запишем уравнение исследуемого листа в следующей форме:

$\rho = 10 + 5 / (|\varphi| + 1)$

Угол φ берется в радианах.

Для того, чтобы наглядно оценить полученные результаты, совместим на рисунке 12 в масштабе 3 : 1 экспериментальные данные, и два варианта данных, вычисленных теоретически (см. Приложение 5) Для этого составим три таблицы.

РАЗМЕРЫ ЛИСТА, ПОЛУЧЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЕМ

φ	0	π/6	π/3	π/2	3π/4	π
ρ	15	14	13	13	12	12
ρв М. 3:1	45	42	39	39	36	36

РАЗМЕРЫ ЛИСТА, ОПИСАННОГО ФУНКЦИЕЙ

$\rho = 13 + 3\cos^7\varphi$ если φ изменяется [0; 63°]

$\rho = 13 + 3\cos^7 63°$ если φ изменяется [63°; 180°]

φ	0	π/6	π/3	π/2	3π/4	π
ρ	16	14,3	13	13	13	13
ρ в М. 3:1	48	43	39	39	39	39

РАЗМЕРЫ ЛИСТА, ОПИСАННОГО ФУНКЦИЕЙ $\rho = 10 + 5 / (|\varphi| + 1)$

φ	0	π/6	π/3	π/2	3π/4	π
ρ	15	13,3	12,5	11,9	11,4	11,2
ρ в М. 3:1	45	39,9	37,5	35,7	34,2	33,6

Анализируя рисунок, можем сказать, что оба найденные нами функции, дают неплохой результат (см. Приложение 5).

Листья виктории, традесканции и жасмина

До сих пор мы рассматривали листья с ровными краями. Чтобы придать краю листа зубчатую форму, в зависимости от ее характера, к уравнению (1) надо добавить еще одно слагаемое. Для примера в его качестве рассмотрим функцию $\rho = a\,|\cos\omega\varphi|$, ее период $T = \pi / \omega$, а график изображен на рисунке 13 (см. Приложение 6). Если эту функцию добавить к уравнению листа яблони, причем добавление вести лишь до угла $\varphi = 63°$, ω положить равным 30, $a = 3$, (a находится измерением, ω путем подсчета зубчиков), то получим уравнение листа виктории:

$\rho = -1{,}33+48{,}70\cos\varphi - 1{,}37\cos 2\varphi + 7{,}02\cos 3\varphi + 3|\cos 30\varphi|$ φ [0; 63º]

$\rho = -1{,}33 + 48{,}70\cos\varphi - 1{,}37\cos 2\varphi + 7{,}02\cos 3\varphi + 3|\cos 30 \cdot 63º|$ φ [63º;180º]

Но форма зубчиков некоторых листьев бывает остроугольная. Для их получения будем добавлять к функции, взятой за основу, функцию $\rho = 4\cos^2 6\varphi$, ее график изображен на рис. 14 (см. Приложение 6). Если мы добавим эту функцию к уравнению кардиоиды $\rho = 20 + 20\cos\varphi$ на интервале [0; $\pi - \pi/12$], получим уравнение листа традесканции:

$\rho = 20 + 20\cos\varphi + 4\cos^2 6\varphi$ если φ изменяется [0; $\pi - \pi/12$]

$\rho = 20 + 20\cos\varphi$ если φ изменяется [$\pi - \pi/12$; π]

Функцию, описывающую какой-либо лист, можно искать не только в полярных, но и в декартовых координатах в виде многочлена, используя интерполяционную формулу Лагранжа [4, с. 105]. Результат в этом случае получается более точный, чем в предыдущих, и для решения поставленной задачи необходимы лишь исходные данные, но этот метод применим только тогда, когда кривая, описывающая половину данного листа относительно оси симметрии является правильной. Для получения другой половины, переменная, обозначающая вторую ось, берется по модулю. Для примера напишем уравнение листа. Снятые с него исходные данные, помещенные в таблицу, подставляются в формулу Лагранжа.

i	0	1	2	3	4	5
X	0	10	20	30	37	47
Y	0	12	15	12,7	6	0

ǀxǀ = (y-0)(y-20)(y-30)(y-37)(y-47)*12/(10-0)(10-20)(10-30)(10-37)(10-47) + (y-0)(y-20)(y-30)(y-37)(y-47)*15/(20-0)(20-10)(20-30)(20-37)(20-47) +

(y-0)(y-20)(y-30)(y-37)(y-47)* 12,7/(30-0)(30-10)(30-20)(30-37)(30-47) +

(y-0)(y-20)(y-30)(y-37)(y-47)* 6/(40-0)(40-10)(40-20)(40-30)(40-47)

После упрощения получаем

ǀxǀ = 2,5308y – 0,217338 y^2 + 0,010938 y^3 – 0,000276062 y^4 + 0,00000249696 y^5

Это и есть уравнение листа жасмина.

III. Заключение

Мир растений настолько разнообразен, что описать все виды встречающихся листьев конечно же невозможно. И поэтому мы рассмотрели только некоторые из них, начиная с более простых, и пытались их усложнить. Например, придавая краю листа зубчатую форму, которая может быть очень разнообразной.

Но не стоит думать, что при отыскании функциональной зависимости, описывающей форму зубчика листа будет решена проблема написания уравнения листа с таким краем. Значение радиус-вектора, определяющего форму кривой, принятой за основу, постоянно меняется, а поэтому будут меняться и расстояния между максимальными значениями получившейся функции, примером этому может служить рисунок 15. Для уравнения листа традесканции именно это и нужно, но часто это бывает лишним.

Надо также отметить, что добавление к основной функции, найденной необходимо вести обычно лишь до какого-то определенного угла, что мы и делали, получая тем самым два уравнения, неплохо было бы обойтись одним. Занимаясь геометрией растений, можно было бы остановиться помимо цветов и листьев на плодах, а точнее на их осевых сечениях, они также очень разнообразны. Но рассмотрение этих вопросов не входило в нашу задачу, их решением предлагается заняться вам.

Возможно, вы подумаете, что написание уравнений листьев – пустое занятие, не находящее практического применения. Но попробуем возразить тем, что интерполяция функций вообще – задача необычайно важная. Практическим путем в различных областях науки, техники, медицины можно получить множество кривых, описывающих какие-либо процессы. Это может быть, например, траектория движения какой-то точки. Для любого физического или химического процесса можно определить общий вид функции, описывающей эту зависимость, и рассчитать в ней все коэффициенты, то нам откроются огромные возможности для дальнейшей творческой работы.

А нахождение «формулы цветов» дает огромный опыт, который поможет интерполировать любую функцию.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрова О.В., Вуколова Т.М., Семенов Ю.С. Математика. Натуральные, целые и рациональные числа. М.: Илекса, 2017.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для СПО. М.: Юрайт, 2015.

3. Бронштейн И.Н. Справочник по математике. М.: Гостехиздат, 1957.

4. Валуцэ И.И. Математика для техникумов. М.: Наука, 1980.

5. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. М.: АСТ, 2008.

6. Зайцев В.В., Рыжиков В.В., Сканави М.И. Элементарная математика. М.: Наука, 1967.

7. Ивановна А.Т. Математика. Справочник для студентов вузов, техникумов, колледжей. СПб.: Феникс, 2014.

8. Лейбсон К.Л. Сборник практических заданий по математике. М.: МЦНМО, 2018.

9. Майсеня Л.И. Справочник по математике: основные понятия и формулы. М.: АСТ, 2012.

10. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика. Справочник для школьников и поступающих в вузы. М.: АСТ-Пресс, 2016.

Приложение 1. Таблицы зависимости

ТАБЛИЦА ДЛЯ ЦВЕТКА С 12-тью ЛЕПЕСТКАМИ

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Радиус (см)	4,33	2,5	0	-2,50	-4,33	-5	-4,33	-2,5	0	2,5	4,33	5
Угол (градусах)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60

№ п/п	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Радиус (см)	4,33	2,5	0	-2,50	4,33	2,5	0	-2,50	4,33	2,5	0	-2,50
Угол (градусах)	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120

№ п/п	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Радиус (см)	4,33	2,5	0	-2,50	4,33	2,5	0	-2,50	4,33	2,5	0	-2,50
Угол (градусах)	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180

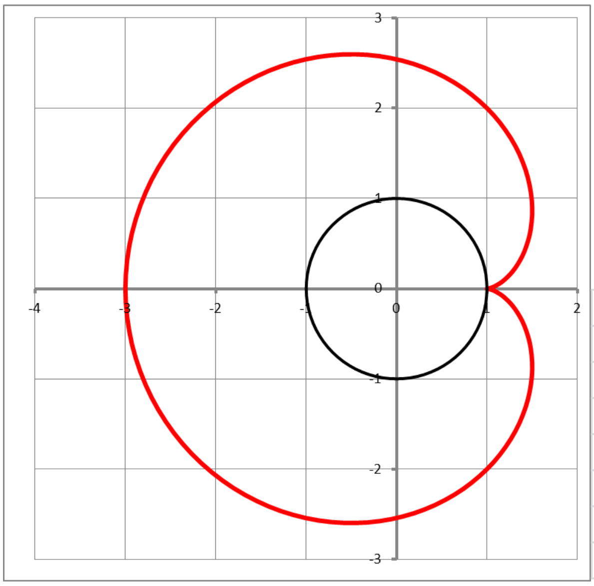
ТАБЛИЦА ДЛЯ ЦВЕТКА С 5-тью ЛЕПЕСТКАМИ

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Радиус (см)	4,33	2,50	0	-2,50	4,33	2,5	0	-2,50	4,33	2,5	0	-2,50
Угол (градусах)	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72

№ п/п	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Радиус (см)	4,33	2,50	0	-2,50	4,33	2,50	0	-2,50	4,33	2,5	0	-2,50
Угол (градусах)	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144

№ п/п	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Радиус (см)	4,33	2,50	0	-2,50	4,33	2,50	0	-2,50	4,33	2,5	0	-2,50
Угол (градусах)	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216

Приложение 2



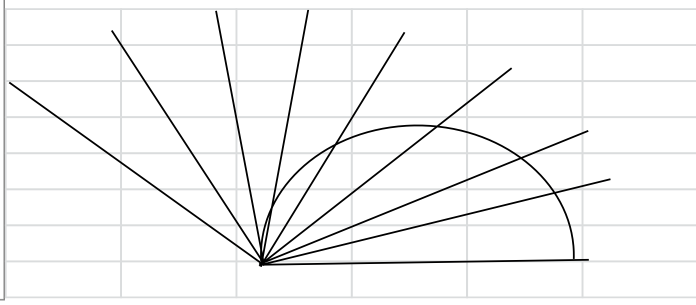


Рис. 1. График листа фиалки

Рис. 2. Лист фиалки

		Кардиоида		Окружность	
№точки	Угол (t)	x	y	x окр	y окр
1	0,000	1	0	1	0
2	0,157	1,02432	0,003852	0,987688	0,156434
3	0,314	1,093096	0,030249	0,951057	0,309017
4	0,471	1,194228	0,098964	0,891007	0,45399
5	0,628	1,309017	0,224514	0,809017	0,587785
6	0,785	1,414214	0,414214	0,707107	0,707107
7	0,942	1,484587	0,666977	0,587785	0,809017
8	1,100	1,495766	0,972996	0,45399	0,891007
9	1,257	1,427051	1,314328	0,309017	0,951057
10	1,414	1,263925	1,66636	0,156434	0,987688
11	1,571	1	2	6,13E-17	1
12	1,728	0,638188	2,284394	-0,15643	0,987688
13	1,885	0,190983	2,489898	-0,30902	0,951057
14	2,042	-0,3202	2,59103	-0,45399	0,891007
15	2,199	-0,86655	2,569091	-0,58779	0,809017
16	2,356	-1,41421	2,414214	-0,70711	0,707107
17	2,513	-1,92705	2,126627	-0,80902	0,587785
18	2,670	-2,3698	1,716998	-0,89101	0,45399
19	2,827	-2,71113	1,205819	-0,95106	0,309017
20	2,985	-2,92643	0,621886	-0,98769	0,156434
21	3,142	-3	4,9E-16	-1	1,23E-16
22	3,299	-2,92643	-0,62189	-0,98769	-0,15643
23	3,456	-2,71113	-1,20582	-0,95106	-0,30902
24	3,613	-2,3698	-1,717	-0,89101	-0,45399
25	3,770	-1,92705	-2,12663	-0,80902	-0,58779
26	3,927	-1,41421	-2,41421	-0,70711	-0,70711
27	4,084	-0,86655	-2,56909	-0,58779	-0,80902

Приложение 3

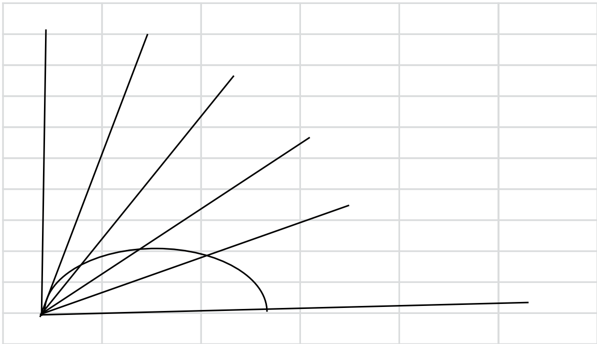


Рис. 3. Лист молодого огурца

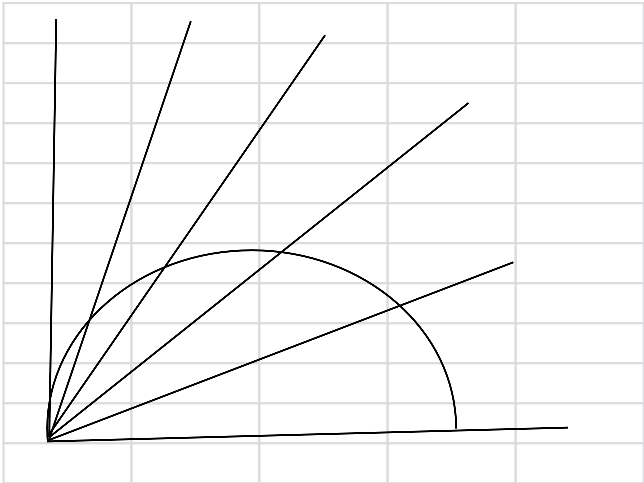


Рис. 4. Лист яблони

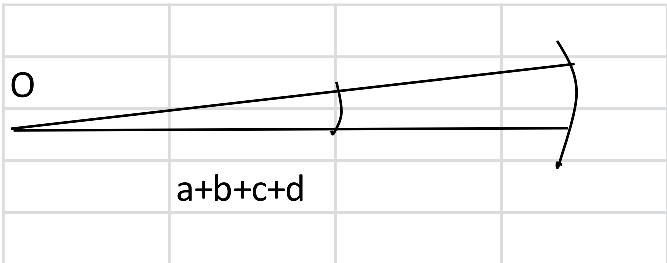


Рис. 5. Несколько градусов листа сирени

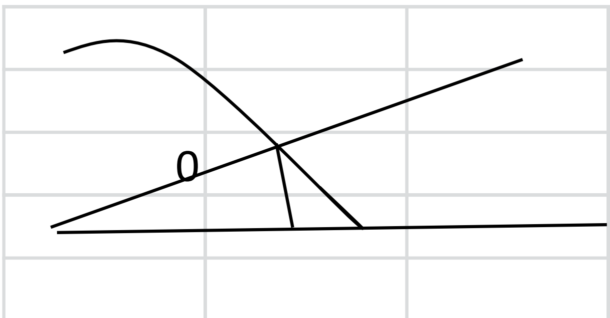


Рис. 6. Интервал от 0º до 90º листа сирени

Приложение 4

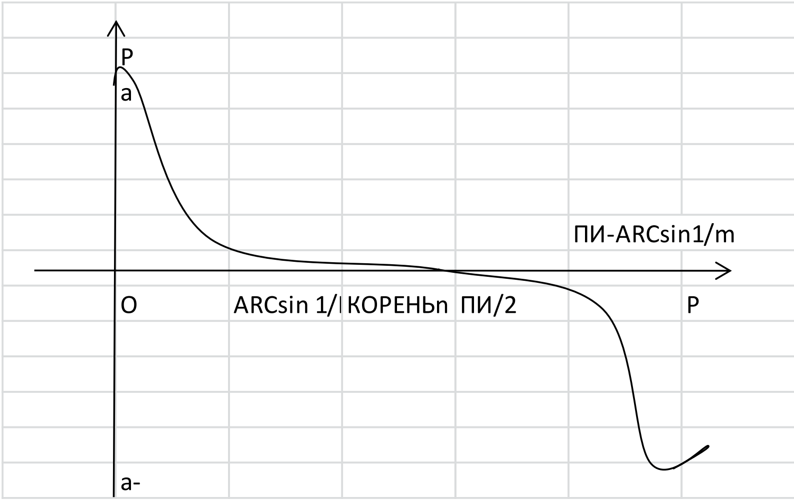


Рис. 7. График$\rho = a\cos^{n}\varphi$ при n нечетном

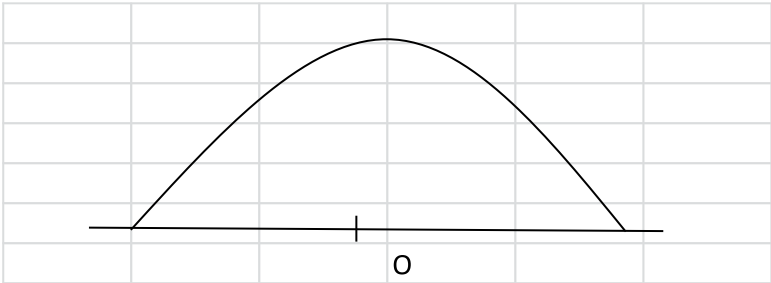


Рис. 8. Лист сирени

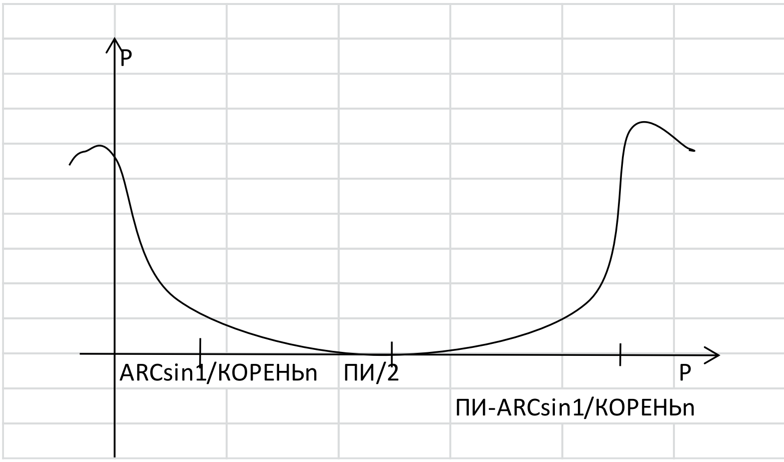


Рис.9. График$\rho = a\cos^{n}\varphi$ при n четном

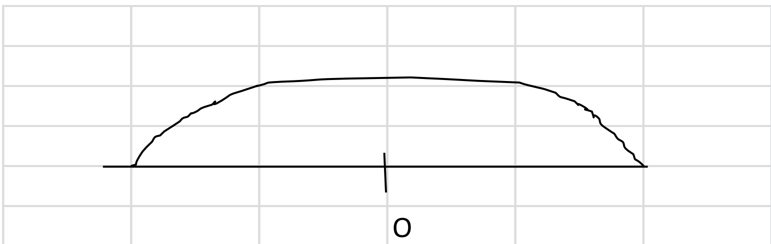


Рис. 10. Лист тополя

Приложение 5

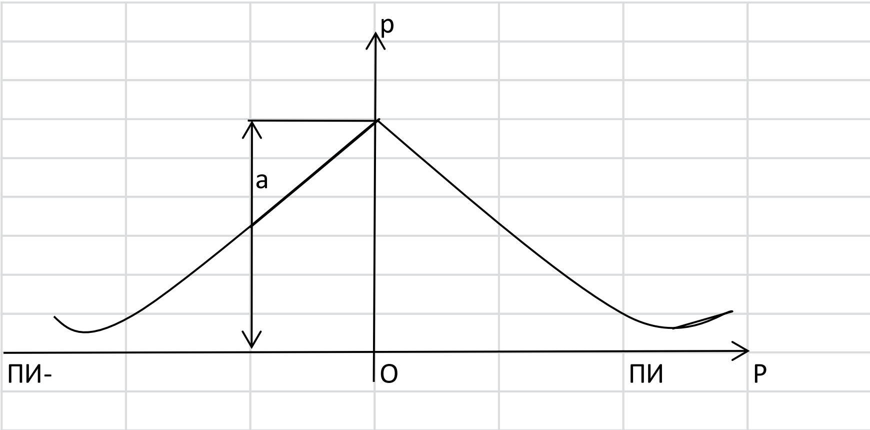


Рис 11. График $\rho = a / (|\varphi| + 1)$

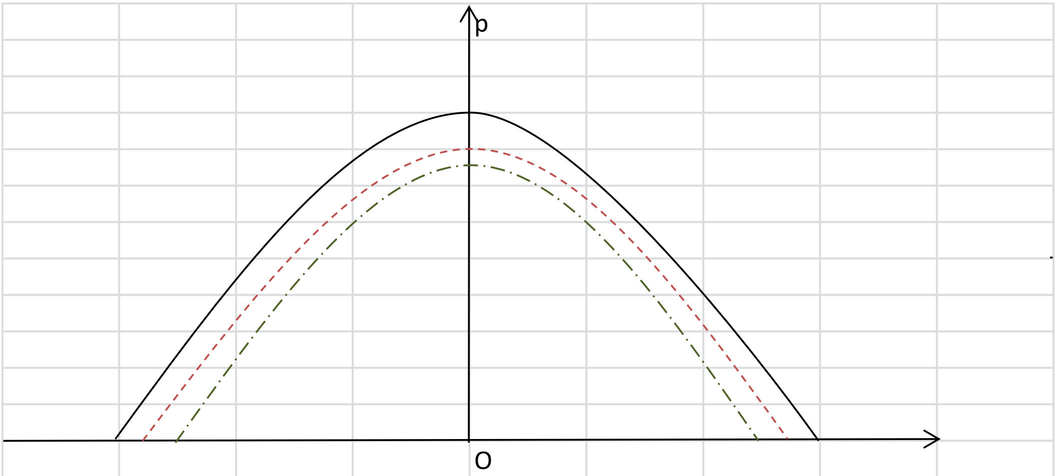


Рис. 12. Лист гороха

Условные обозначения:

Линия – лист, описанный функцией:

$$p=13+3\cos^7 \varphi$$

$$p=13+3\cos^7 63^o$$

Штрих – лист гороха

Штрих-пунктир – лист, описанный функцией $\rho = 10 + 5 / (|\varphi| + 1)$

Приложение 6

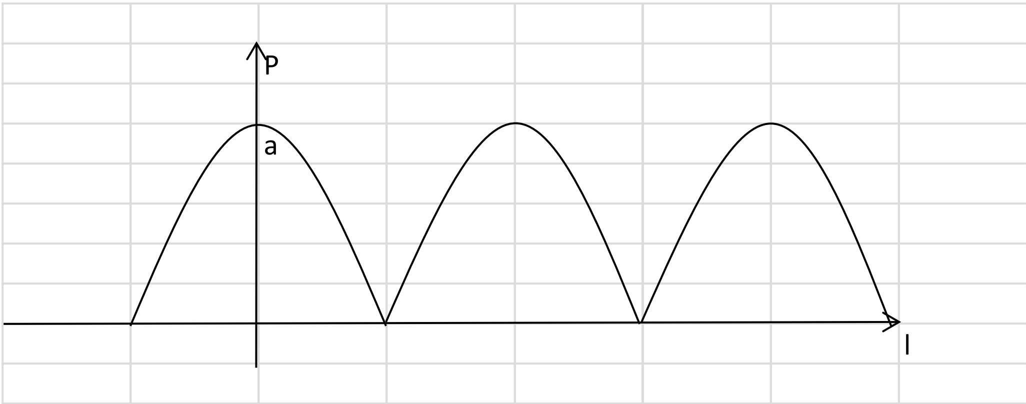


Рис. 13. График ρ = a |cos ωφ| с T = π / ω

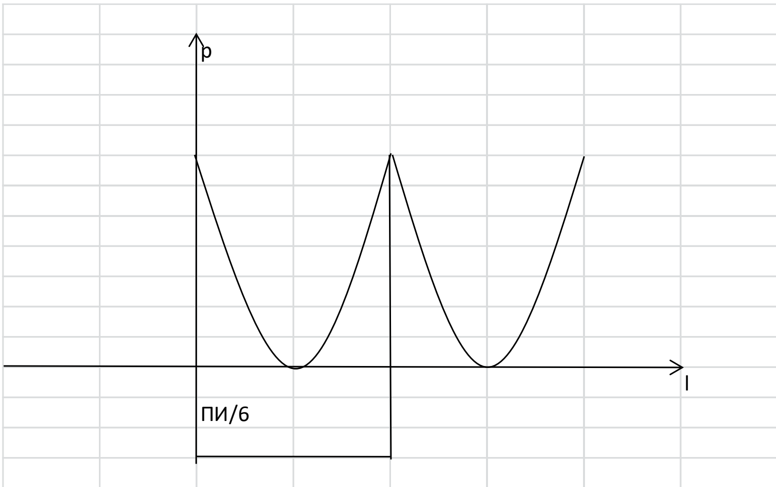


Рис. 14. График $\rho = 4\cos^2 6\varphi$