МУНИЦИПАЛЬНОЕ КАЗЕННОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ЦИЛИТЛИНСКАЯ СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА
ГУМБЕТОВСКОГО РАЙОНА РЕСПУБЛИКИ ДАГЕСТАН

Графические методы решения уравнений и неравенств с параметрами

Выполнила: Абулгасанов Бадрудин Ражабович ученик 10 класса МКОУ «Цилитлинская СОШ» с. Цилитль Гумбетовского района

Руководитель: Абакардибиров Муъмин Зайитханович учитель математики и информатики МКОУ «Цилитлинская СОШ»

Цилитль – 2022г.

Оглавление

Введение

Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры, но их решение вызывает у нас значительные затруднения. Связано это с тем, что каждое уравнение или неравенство с параметром представляет собой целый класс обычных уравнений и неравенств, для каждого из которых должно быть получено решение. Решая задания ЕГЭ мы встречаемся с трудностями решения задач с параметрами. Поэтому я решила более глубоко вникнуть в решение подобных заданий для расширения моих представлений о приемах и методах решения уравнений и неравенств с параметром при подготовке к ЕГЭ.

Решению задач с параметрами в школьной программе уделяется мало внимания. Большинство учащихся либо вовсе не справляются с такими задачами, либо приводят громоздкие выкладки. Причиной затруднения учащихся в решении задач с параметрами по моему является отсутствие системы заданий по данной теме в наших учебниках.

Что же такое параметр и почему подобные задачи вызывают такие трудности?

Параметр - это переменная, значение которой считается фиксированным, и каждое значение параметра определяет относительно заданного неизвестного соответствующее уравнение (неравенство, систему).

В процессе подготовки к экзамену необходимо отрабатывать у себя умение четко представлять ситуацию, о которой идет речь, анализировать, сопоставлять, устанавливать зависимость между величинами. Важно знакомиться с различными способами решения задачи, а не отдавать предпочтение какому-то одному способу. Решая задачи нужно знать, что при выполнении работы можно выбрать любой способ решения. Главное, чтобы задача была решена правильно. Работая над проблемой я выделила следующие задачи***:***

- Возможность реализовать свой интерес к математике и индивидуальные возможности для его освоения.
- Умение решать стандартные и нестандартные уравнения и неравенства с параметром.
- Обеспечение подготовки к поступлению в вуз.

Использую возможности интернета я нашла литературу из которой мне понравились работы Г.А. Тинякова, В.В. Амелькина, А.Г.Корянова наиболее доступно раскрывающие проблемы решения задач с параметрами.

Рассмотрим приемы и методы решений задач с параметрами с использованием ***метода наглядной графической интерпретации.*** В зависимости от того, какая роль отводится параметру в задаче, можно выделить два основных графических приема: первый - построение графического образа на координатной плоскости *Oxy*, второй - на координатной плоскости *Oxa.*

Суть каждого способа рассмотрена на примерах.

Встречающиеся задачи на исследование уравнения или неравенства с параметром *a* можно записать в виде$f(x, a) \vee g(x, a)$,

где символ v заменяет один из знаков$=, >, <, >, <, \leq, \geq$.

Так как основу уравнений и неравенств составляют выражения $f(x, a)$ и$g(x, a)$, то в зависимости от того, какая роль отводится параметру в задаче (параметр - фиксированное число, или параметр - переменная), запись $f(x, a)$ рассматривается либо как семейство функций с переменной x, либо как выражение с двумя переменными *x* и *a*. В соответствии с этим используется два основных графических приема решения подобных задач: первый - построение графического образа задачи на координатной плоскости *Oxy*, второй - на координатных плоскостях Oxa или Oax.

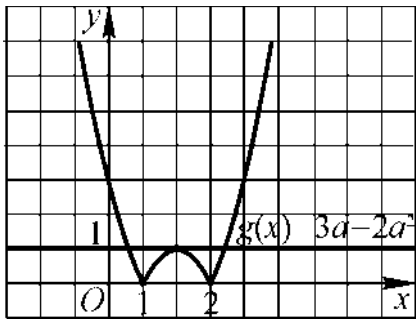
Координатная плоскость *Oxy задачи вида* $\boldsymbol{f(x) \vee a}$

Первый прием заключается в следующем. Исходное уравнение (или неравенство) преобразуют к виду $g(x) \vee f(x, a)$**.** На плоскости *Oxy*строится график функции $y = f(\text{x})$**.** Функция $y = \text{g}(\text{x})$задает определенное семейство кривых, зависящих от параметра *a* **.** Кривые этого семейства получаются из кривой $y = f(\text{x})$с помощью некоторого элементарного преобразования (параллельного переноса вдоль осей, растяжения, наложения модуля или в случае линейной зависимости между *x*и *y* — поворота относительно некоторой точки). Построив графический образ уравнения $g(x) \vee f(x, a)$**.** можно установить, сколько точек пересечения имеют графики функций *y*=*g(x)* и *y*=$f(x, a)$,- это определяет количество корней уравнения $g(x) \vee f(x, a)$, а, следовательно, и исходного уравнения в зависимости от значения параметра.

Пример. *Определите количество различных корней уравнения*

$$|x - 4x + 3| = 3\text{a} - 2\text{a}^2$$

в зависимости от параметра а.



Решение. Рассмотрим взаимное расположениеграфикафункции $f(\text{x}) = |\text{x}^2 - 4\text{x} + 3|$ипрямой$g(\text{x}) = 3\text{a} - 2\text{a}^2 = A$ на координатной плоскости Oxy. Из рисунка 11 видно, что при *A*< 0 графики не имеют общих точек; если 0 <*A*< 1, то графики имеют четыре точки Рис. 1 пересечения; две общие точки получаем при условии *A* = 0 или *A*> 1.

На рисунке 1 представлен случай, когда графики имеют ровно три общих точки. Данное уравнение имеет три различных корня, если выполняется условие $A = 3\mathrm{a} - 2\mathrm{a}^2 = 1$. Отсюда *a* = 0,5 или *a* = 1. Аналогично находим значения *a* для других случаев.

Число различных корней	0	2
Условия	$3a - 2a^2 < 0$	$\left[\begin{array}{l} 3\mathrm{a} - 2\mathrm{a}^2 = 0,3 \\ \mathrm{a} - 2\mathrm{a}^2 > 1. \end{array}\right.$
Ответ	$(-\infty;\ 0)\ \cup (1{,}5;\ +\infty)$	$(0{,}5;\ 1) \cup \{0;\ 1{,}5\}$

Число различных корней	3	4
Условия	$3a - 2a^2 = 1$	$\left[\begin{array}{l} 3\mathrm{a}\ -\ 2\mathrm{a}^2 > 0, \\ 3\mathrm{a}\ -\ 2\mathrm{a}^2 <\ 1. \end{array}\right.$
Ответ	{0.5; 1}	$(0;\ 0{,}5) \cup (1;\ 1{,}5)$

задачи вида $f(x) \vee g(x)$ +а и параллельный перенос графика вдоль оси Оу

При решении задач данного вида используется семейство функций $g_a\,(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x}) + a$, графики которых отличаются от графика функции *y* = g(x) смещением вдоль оси *Oy* на *a* единиц вверх при *a*> 0, вниз - при *a*< 0.

Пример. *Найти все значения а, при каждом из которых функция*

$$f(\mathrm{x}) = 2|2|\,\mathrm{x}\,|\ - \mathrm{a}^2\ -\ \mathrm{x}|\ +\ \mathrm{a}$$

имеет ровно три нуля.

Решение. Переформулируем задачу: *найти все значения а, при каждом из которых уравнение* $2|2|x| - \mathrm{a}^2| = x - \mathrm{a}$ *имеет ровно три различных решений.*

При $\mathrm{a} = 0$ уравнение $4|x| = x$ имеет один корень $x = 0$.

При $\mathrm{a} \neq 0$ построим графики функций $\mathrm{y} = 2|2|\mathrm{x}| - \mathrm{a}^2|$ и $\mathrm{y} = x - \mathrm{a}$. Первая
функция является кусочно-линейной и ее график (см. рис. 2) получается из графика функции $\mathrm{y} = 4|\mathrm{x}|$с помощью элементарных преобразований (параллельного переноса последнего вдоль оси ординат на *2a*^{2} единиц вниз и симметричного отражения наверх относительно оси абсцисс части графика функции $\mathrm{y} = 4|\mathrm{x}| - 2\mathrm{a}^2{}_{\mathrm{a}}2$ расположенной ниже этой оси). Построенный график (см. рис. 2) пересекает ось *Ox* в точках $A\left(\frac{a^2}{2};0\right)$ и $B\left(\frac{a^2}{2};0\right)$, *a* ось *Oy* в точке *C*(0; 2a^2).

Функция $\mathrm{y} = x - \mathrm{a}$ задает прямую, параллельную прямой y = x, пересекающую оси координат в точках (a; 0) и (0; -a) .

Графики функций $у = x - а$ и $у = 2|2|x| - а^2|$ пересекутся в трех точках тогда и только тогда, когда прямая $у = x - а$ пройдет через точку *A* или точку *C* (см. рис. 2). Во всех остальных случаях количество точек пересечения графиков функций будет или больше, или меньше трех. Определим значения параметра *a* в первом и во втором случае.

Если прямая $у = x - а$ проходит через точку А, то из уравнения $0 = -\frac{a^2}{2} - a$ при условии $а \neq 0$ получаем $a = -2$.

Если прямая $у = x - а$ проходит через точку С, то из уравнения $2а^2 = -а$ при условии $а \neq 0$ получаем $а = -0{,}5$.

Ответ. - 2, - 0,5 .

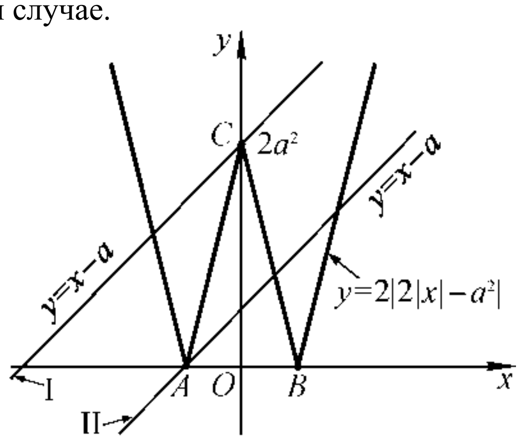


Рис. 2

задачи вида $f(x) \vee g(x + а)$ и параллельный перенос графика вдоль оси Ох

При решении задач данного вида используется семейство функций $g_a(х) = g(х + а)$, графики которых отличаются от графика функции $у = g(х)$
смещением вдоль оси *Ох* на *a* единиц влево при *a*> 0, вправо - при *a*< 0.

задачи вида $f(х)\vee a(х - х_0) + у_0$ и поворот графика относительно точки

Рассмотрим применение семейства функций вида $f_a(х) = а(х - х_0) + у_0$, которому соответствует семейство прямых, проходящих через точку (x_0, y_0). Параметр *a* выполняет роль углового коэффициента указанных прямых, поэтому при увеличении значений параметра получаем прямые, отличающиеся друг из друга поворотом на некоторый угол против часовой стрелки относительно точки (x_0, y_0) *(центр поворота).* Множество прямых, проходящих через точку (x_0, y_0), называют еще *пучком прямых,* где (x_0, y_0) является центром пучка.

Пример. (ЕГЭ, 2007). *Найти все значения а, для которых при каждом х из промежутка* (4; 8] *значение выражения*$log_2^2 x - 8$*<u>не равно</u> значению выражения* (2a -1) $\log_2$x.

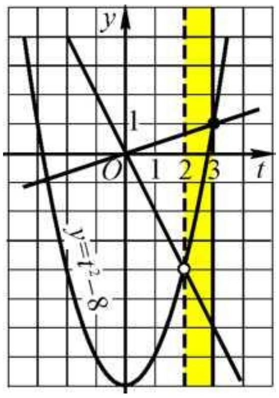
Решение. 1. Пусть $\log_2$ x = t, тогда при x = 4 имеем *t* = 2 ; если x = 8, то *t* = 3. Так как функция *t* = $\log_2$ x непрерывная и возрастающая, то при всех значениях переменной *x* из промежутка (4; 8] переменная *t* принимает все значения из промежутка (2; 3].

2. Переформулируем задачу: *найти все значения a, для которых при каждом t из промежутка* (2; 3] *значение выражения* t^2-8 *не равно значению выражения*$(2a - 1)t$.

3. Графиком функции $у = t^2 - 8$ является парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 4). Функция $у = (2а - 1)t$ задает семейство прямых, проходящих через начало координат. При увеличении углового коэффициента прямые поворачиваются против часовой

стрелки.

4. Парабола $\mathrm{y} = t^2 - 8$ пересекает прямую t=2 в точке (2;-4): y=2^2-8=-4 . Угловой коэффициент прямой $\mathrm{y} = (2\mathrm{a} - 1)\mathrm{t}$, проходящей через точку (2; -4), равен: $2a - 1 = -2$. Парабола пересекает прямую t = 3 в точке (3; 1): y = 3^2 - 8 = 1. Угловой коэффициент прямой $\mathrm{y} = (2\mathrm{a} - 1)\mathrm{t}$, проходящей через точку (3; 1), равен: $2a - 1 = \frac{1}{3}$.



5. Условие «*значение выражения* t^2-8 *не равно значению выражения* $(2a - 1)t$*при* $t \in (2;\ 3]$» графически означает, что прямая $\mathrm{y} = (2\mathrm{a} - 1)\mathrm{t}$ не пересекает параболу на промежутке (2; 3]. Это выполняется при условиях

$$\left[\begin{array}{l} 2a - 1 \le -2 \\ 2a - 1 > \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Решая совокупность неравенств, получаем ответ. *Ответ:* $a \le -\frac{1}{2}, a > \frac{2}{3}a$ Рис. 4

задачи вида $f(x) \vee ag(x)$и сжатие (растяжение) графика вдоль оси Oy

При решении задач данного вида используется семейство функций g_a(x)=ag(x), графики которых отличаются от графика функции y=g(x) сжатием (растяжением) вдоль оси Oy: растяжением, если a>1; сжатием при 0<a<1; преобразованием симметрии относительно оси x, если a=-1; сочетанием указанных преобразований для остальных значений $\mathrm{a} \neq 0$.

Пример. *При каких значениях параметра а уравнение* ax^2+|x-1|=0 *имеет три решения*?

Решение. Перепишем данное уравнение в следующем виде: $ax^2 = -|x - 1|$. График функции $\mathrm{y} = -|x - 1|$ - «уголок» с вершиной в точке (1;0), ветви которого направлены вниз (см. рис. 5). Функция y_a = ax^2 задает семейство парабол с вершиной (0;0) при $a \neq 0$ и прямую y=0 при a=0. Изменение параметра a влияет на направление ветвей параболы.

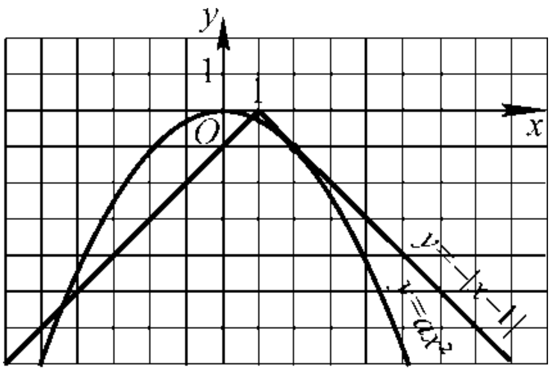


рис. 5

Если a=0, то прямая y=0 и график функции $\mathrm{y} = -|x - 1|$имеют одну общуюточку, а следовательно данное уравнение - один корень. Значение a=0 не удовлетворяет условию задачи.

Если a> 0, то ветви параболы направлены вверх, и графики не имеют общих точек.

Пусть $\mathrm{a} < 0$, тогда ветви параболы будут направлены вниз. Легко доказать, что в этом случае парабола и прямая $\mathrm{y} = x - 1$ имеют две общие точки, проверив, что для уравнения

$ax^2 - x + 1 = 0$ дискриминант $D = 1 - 4a > 0$. Еще одна общая точка будет, когда прямая $y = -x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2$. Обозначим через x_0 абсциссу точки касания прямой $y = -x + 1$ с параболой $y = ax^2$ и запишем условия касания:

$$\left[\begin{array}{l} y(x_0) = -1 \\ ax_0^2 = -x_0 + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2ax_0 = -1 \\ ax_0^2 = -x_0 + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ a = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ответ. $a = -\frac{1}{4}$

Координатные плоскости *Oxa* и *Oax*

Данный метод представляет собой некоторое обобщение графического метода решения уравнений и неравенств, основанного на использовании координатной плоскости *Oxa* или *Oax*. В последнем случае ось *Ox* называют *координатной,* ось *Oa* - *параметрической*, а плоскости *Oxa* и *Oax–координатно-параметрическими* (или *КП* - *плоскостями).*

При использовании этого метода исходное уравнение (или неравенство) преобразуют к виду $a \vee \varphi(x)$ или$x \vee \psi(a)$. В первом случае на плоскости *Oxa* строят график функции $\varphi(x)$а затем, пересекая полученный график прямыми, параллельными оси *Ox*, получают необходимую информацию. Во втором - производят построения графика функции $\psi(a)$на плоскости *Oax* . Другой вариант этого приема связан с нахождением графического решения уравнения (неравенства) вида $f(x,a) \vee 0$, а затем его аналитической интерпретацией. Построение графика уравнения *f(x,a)=0* с двумя переменными *x* и *a* на плоскости *Oax* является основой для ответа на поставленный вопрос о решениях уравнения с параметром. Графическим решением неравенства $f(x,a) \vee 0$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков $>, <, \geq, \leq$, являются множества точек (области) плоскости, координаты которых удовлетворяют данному неравенству.

При решении конкретной задачи координатно-параметрическим методом в ходе решения плоскость *Oxa* разбивается на «частичные области», внутри каждой из которых геометрически интерпретируется и решается поставленная задача.

Замечание. В частности, понятие «частичных областей» используется при решении уравнений и неравенств, содержащих неизвестные под знаком абсолютной величины (этот метод называют методом *«частичных областей»).* В свою очередь при решении логарифмических и показательных (и некоторых других) уравнений и неравенств также приходится разбивать плоскость *Oxa* на области.

задачи вида $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{\varphi}(x)$ *или* $x \vee \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{a})$

При решении уравнения или неравенства $f(x,a) \vee g(x,a)$ иногда удается выразить одну из переменных в явном виде, что позволяет перейти от задачи с параметром к задаче без параметра, а именно к исследованию функциональной зависимости одной переменной от другой.

Для решения неравенств полезным будет напомнить одно простое утверждение: пусть имеется график функции $\mathrm{y} = f(\mathrm{x})$, тогда множество точек плоскости, расположенных выше графика, будет геометрическим изображением решения неравенства $y > f(x)$, а для точек, лежащих ниже графика - неравенства $y < f(x)$.

задачи вида $\boldsymbol{f(a, x)} \vee \mathbf{0}$

Рассмотрим уравнения и неравенства, в которых переменные x или a заданы в неявном виде, и выразить какую-либо переменную в явном виде сложно.

В предлагаемых задачах уравнение с двумя переменными $f(a, x)$=0 , как правило, задает на координатной плоскости некоторые линии. Это составляет основу при решении неравенств.

Для решения неравенств вида $f(a, x) \vee 0$ удобно использовать *метод областей,* суть которого представлена ниже при решении примеров.

Для решения уравнений или неравенств, содержащих знак модуля, обычно используют метод «частичных областей». Основная идея этого метода состоит в том, что решение задачи в исходной области (в частности, на плоскости *Oxa*) сводится к решению совокупности смешанных систем (уравнений и неравенств), не содержащих знаков абсолютной величины, в каждой частичной области, на которые разбивается исходная область.

Заключение

Лучше всего приведенные методы работают в тех случаях, когда в условии задачи ставится вопрос о количестве корней в зависимости от значений параметра или определения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно.

Графическое представление уравнения или системы уравнений с параметром обладает несколькими несомненными преимуществами: во- первых, построив график (графики), можно определить, как влияет на них и, соответственно, на решение уравнения изменение параметра; во- вторых, иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи и, в-третьих, ряд теорем позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о количестве корней уравнения, об их границах и т.д.

Естественно, что при использовании графических методов возникает вопрос о строгости решения. Требования к строгости должны определяться здравым смыслом.В случаях, когда результат, полученный с помощью графического метода, вызывает сомнения, его необходимо подкрепить аналитически.

Иногда бывает достаточно лишь построить необходимые графики и, используя свойства непрерывности и монотонности функций, сделать правильный вывод.

Список литературы

1. Г.А. Тиняков, И.Г. Тиняков Задачи с параметрами, Москва, 1996
2. В.В. Амелькин, В.Л. Рабцевич, Задачи с параметрами, Минск «Асар», 2004.
3. С.А. Субханкулова, Задачи с параметрами, Москва, ООО «Илекса», 2009
4. А.Г. Корянов, А.А. Прокофьев, Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений, Математика ЕГЭ 2011 (типовые задания С5)
5. А.А. Прокофьев, Задачи с параметрами, Москва, 2004
6. www.problems.ru База данных задач по всем темам школьной математики. Задачи разбиты по рубрикам и степени сложности. Ко всем задачам приведены решения.