

Научно-исследовательская работа

Музыка

СВЯЗЬ МУЗЫКИ И МАТЕМАТИКИ

Выполнил:

Тарасов Тимофей Игоревич

учащийся 4 «А» класса

МАОУ «Гимназия №4 им. Безбокова В.М., Россия г. Саратов

Руководитель:

Варанкина Галина Петровна

Учитель младших классов

МАОУ «Гимназия №4 им. Безбокова В.М., Россия г. Саратов

Содержание:

1. Введение
2. Основная часть
 - История исследования связи музыки с математикой
 - Математика в музыке
 - Вклад Пифагора
 - Вклад Баха
 - Золотое сечение в музыкальных произведениях
3. Практическая часть
4. Заключение
5. Список литературы:

Введение.

Однажды для подготовки домашнего задания мне нужно было прочитать журнал. Мама нашла для меня журнал для школьников «Лучик». Он оказался очень интересным и познавательным. Но особенно меня заинтересовали статьи о связи музыки с математикой. Я занимаюсь музыкой с 7 лет, но не задумывался, что такие несовместимые понятия как музыка и математика связаны между собой. Принято считать, что математика - это наука, а музыка – искусство. Но в очередной раз я убеждаюсь, что все не так просто, как кажется и на самом деле музыка математична, а математика музыкальна. Поэтому я решил изучить эту тему подробнее.

Актуальность темы заключается в том, что в мире цифровых технологий роль математики возрастает с каждым днем. Математика проникает в другие науки и изучение ее взаимосвязи с музыкой помогает оценить и понять этот процесс.

Цель моего исследования – изучение связи музыки и математики.

Задачи:

- узнать историю изучения связи музыки и математики,
- определить какие математические закономерности используются в музыке,
- изучить вклад ученых в исследование взаимосвязи музыки и математики,
- сделать музыкальный инструмент используя математические закономерности и проверить действие музыкальных законов системы Пифагора.
- выяснить помогает ли математика понять теорию музыки, а музыка - в изучении математики.

Основная часть

1. История исследования связи музыки с математикой.

Древнегреческий философ и математик Пифагор (570-490 гг. до н.э.) одним из первых задумался о том, почему же одни сочетания звуков кажутся нам красивыми, а другие - не очень? От чего это зависит?

Существует история, что однажды Пифагор проходил мимо кузницы и услышал, как молоты издавали четыре консонанса – то есть красивых, «согласных» между собой звука. Он вошел в кузницу и попросил продать ему эти молоты. Вернувшись домой, Пифагор тщательно взвесил молоты и обнаружил, что вес молотов соотносился как целые числа: 6, 8, 9, 12. Таким образом относительно самого тяжелого молота вес остальных представлял собой простые дроби: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Так получались те самые консонансы, то есть красиво звучащие интервалы: октава ($\frac{1}{2}$), квинта ($\frac{2}{3}$) и кварта ($\frac{3}{4}$).

Всю свою жизнь Пифагор был сторонником теории, что всем миром управляют простые числа – «всё в мире есть число». И вот теперь он нашел для своей теории просто потрясающее и наглядное подтверждение - музыка состояла из целых чисел и их отношений!

Пифагор создал свою школу мудрости, положив в ее основу два предмета - музыку и математику. В те времена музыка входила в состав семи "свободных искусств", делившихся на "trivium" (грамматика, риторика, логика) и "quadrivium" (арифметика, геометрия, астрономия, музыка). Интересно, что музыка относилась именно к сфере математических знаний. Тем самым она признавалась одной из отраслей математики. Пифагор считал, что гармония чисел сродни гармонии звуков, и что оба этих занятия упорядочивают хаотичность мышления и дополняют друг друга.

Исследованию музыки посвящали свои работы многие величайшие математики, такие как: Рене Декарт (его первый труд - "Трактат о музыке"), Готфрид Лейбниц, Христиан Гольдбах, Жан Д'Аламбер, Даниил Бернулли и другие.

В своих трудах ученые неоднократно делали попытки представить музыку как математическую модель. Леонард Эйлер в своей работе "Диссертация о звуке" в 1727 году писал: "Моей конечной целью в этом труде было то, что я стремился представить музыку как часть математики и вывести в надлежащем порядке из правильных оснований все, что может сделать приятным объединение и смешивание звуков".

Лейбниц в письме Гольдбаху писал: "Музыка есть скрытое арифметическое упражнение души, не умеющей считать". На что Гольдбах ему отвечал: "Музыка - это проявление скрытой математики".

Эйнштейн играл на скрипке. У него было несколько скрипок, с которыми он не расставался. Он просто обожал музыку, и без скрипки не мог думать: «Если бы я не был физиком, я, вероятно, был бы музыкантом. Я часто думаю в музыке, музыкой». Известно также, что основным дарованием физика он считал не логику, которая лишь помощник и инструмент, а интуицию. Логично предположить, что музыка "переключала" его мозг на другой, интуитивный способ мышления.

Моцарт считался увлекающейся натурой. В числе прочих увлечений был в его жизни и "математический" период, когда, по некоторым воспоминаниям, стены и пол его комнаты были исписаны формулами. Современные исследования музыки делают вывод о том, что именно произведения Моцарта просто "нашпигованы" математическими приемами.

Признанный архитектор Янис Ксенакис всю жизнь занимался музыкой, стал не только известным композитором, но и музыковедом-теоретиком. Объединяло его работы, достижения и увлечения то, что всюду он применял или искал возможности применения математических методов. Ксенакис в своей книге «Формализованная музыка» разбирал возможности применения в сочинении и изучении музыки таких разделов математики как теория множеств, теория вероятностей, теория информации, теория игр.

Были и другие замечательные музыканты, которые плотно связаны с математикой. Среди них Филип Гласс, Ла Монте Янг, Стив Райх и Терри

Райли. Среди наших соотечественников хочется выделить Сергея Прокофьева. Он запомнился многим не только как выдающийся композитор, но и как отличный шахматист.

2. Математика в музыке

В музыке, как и в математике, все надо считать: 7 нот, 5 линеек нотного стана, интервалы, метроритмика или ритм, длительность, знаки в тональностях и их параллельности, размер.

Музыкальный строй — это система сопоставления нот (знаков, обозначений) и звуковых частот. Периодом музыкального строя является октава — интервал между нотами, частоты которых отличаются в два раза. Традиционно октава состоит из 12 ступеней. Например, на клавиатуре рояля она представлена семью основными (белыми) клавишами и пятью дополнительными (чёрными).

Высчитать длительность того или иного звука люди придумали с помощью счета: целые ноты (четыре счета); половинки(два счета); четверти(один счет) и так далее. Оказывается, что длительности получаются так же, как и дроби, они возникают при делении целой на равные доли. Здесь и происходит сопоставление целого числа и целой длительности, дробного числа и длительности коротких нот, записываемых при помощи дроби.

В музыке есть понятие интервал - это расстояние от звука к звуку. Всего - восемь интервалов. Их названия зависят от количества ступеней, которое они охватывают. Названия интервалов применяются на латинском языке в виде порядковых числительных. Эти числительные обозначают, какая по счету ступень - верхний звук интервала по отношению к нижнему звуку. Кроме того, для сокращения применяется цифровое обозначение интервалов. Повтор одного звука называется прима; второй от первого называется секунда; от одного до третьего называется терцией; от первого до четвертого кварта; от первого до пятого квинта; от первого до шестого секста; от первого до седьмого септима; от первого до восьмого октава.

С одной стороны, интервал может быть представлен как абстрактная математическая величина, выраженная отношением двух чисел, с другой стороны, как определенное выражение нагрузки в музыке. Так кварта - твердый, решительный интервал и его использование в музыке создает интонацию приказа, торжественности (Можно это наблюдать в Гимне России). Поэтому, интервал имеет ступеневую (музыкальную) и тоновую (математическую) характеристику.

Определение тоновой (математической) величины интервала необходимо потому, что ступеневая (музыкальная) величина определяет его лишь приблизительно. Тоновая величина и зависящее от нее качество интервала определяются прилагательными: чистая, большая, малая, увеличенная, уменьшенная, дважды увеличенная и дважды уменьшенная. Эти прилагательные пишутся и произносятся перед числительным, обозначающим ступеневую величину (например, чистая прима).

В музыке, как и в математике, тоже есть понятие параллельности. Параллельные тональности, а ещё линии нотного стана всегда параллельны, то есть, никогда не пересекаются. Кроме того, с понятием последовательность в математике мы встречаемся очень часто. Обычно цель при встрече с ними – отгадать следующее число или символ. Все музыкальные произведения тоже записываются нотами в определенной музыкальной последовательности.

Ритм важнейший элемент в музыке. Числа, оказывается, тоже обладают ритмом. Например, числа кратные 3 обладают следующим ритмом: 0123456789 и т.д. Получается красивый, правильный, равномерный ритм, звучащий как трёхдольный музыкальный размер $3/4$, который соответствует вальсу.

Как в музыке, так и в математике существуют противоположности: мажор – минор, форте – пиано, staccata – legato, плюс-минус и т. д.

Как в математике существует понятие скорости, так и в музыке темп, обозначает скорость музыкального движения.

Все вышеперечисленное подтверждает, что между музыкой и математикой есть тесная взаимосвязь.

3. Вклад Пифагора

Итак, связь между музыкой и математикой существует. Но исследования Пифагора и его последователей достойны особого внимания в этой работе. Какие же открытия они сделали?

С помощью математической формулы, Пифагор выяснил, какие пропорции существуют между звуками, и какие из них лучше сочетаются между собой.

Пифагор и его последователи разработали «Пифагоров строй». Новая технология использовалась для настройки популярного в то время инструмента – лиры. Однако, «Пифагоров строй» был несовершенен, как и древнегреческая арифметика. Расстояние между соседними звуками «Пифагорова строя» были неодинаковые. Он – неравномерный. Но именно этот строй определил на тысячелетия, если не навечно, все развитие музыкальной культуры, не только европейской, но и восточной

Ученые – философы пифагорейцы сформулировали ряд акустических законов музыки, на которых сегодня базируется современная наука акустика:

1. Две звучащие струны определяют консонанс, если их длины относятся как целые числа, образующие треугольное число $10=1+2+3+4$, т.е. как 1:2, 2:3, 3:4. Причем, чем меньше число n в отношении $n:(n+1)$ ($n=1,2,3$), тем созвучнее получающийся интервал.

2. Частота колебания звучащей струны обратно пропорциональна ее длине.

3. Квинта есть среднее гармоническое длин струн основного тона l_1 и октавы l_2 , а кварта — среднее арифметическое l_1 и l_2 .

4. Октава есть произведение квинты на кварту.

5. Октава так относится к квинте, как кварта к основному тону.

6. Октава делится на два неравных консонансных интервала — квинту и кварту. Интервал, дополняющий данный интервал до октавы, называется его

обращением. Сумма октавы - это число 9, при обращении каждого интервала нужно отнимать его число из 9, тогда получается его обращение.

7. Тон-интервал равен отношению квинты к кварте.

Также, пифагорейцы вычислили «золотую пропорцию» — конкретное место в музыкальном произведении, где должна быть кульминация.

Хочется сказать, что это только часть музыкальных законов пифагорейцев. В этой работе я не упомянул о некоторых законах потому, что в них используются пока не известные мне математические термины: логарифмы, коэффициенты, степени и корни.

4. Вклад Баха

Открытием для меня стало и то, что Иоганн Себастьян Бах (1685-1750) популяризировал Темперированный музыкальный строй - это деление октавы на двенадцать равных частей – полутонов.

До Баха музыканты использовали разные строи, но они были не совершенны. И.С. Бах был первым, кто начал использовать Темперированный строй в своих произведениях. Этим музыкальным строем мы пользуемся до сих пор. Вся современная музыка написана именно в нем. Каждый интервал в этом строе имеет формулу.

5. Золотое сечение в музыкальных произведениях

«Золотое сечение» или «Божественная пропорция» - это пропорция природной гармонии. Проще говоря, это деление отрезка на части, которые соотносятся между собой примерно 1:1.618. Это понятие, скорее, математическое и его изучение – задача науки. Однако, доклад музыковеда Розенова Э.К. «Закон золотого сечения в музыке и поэзии» в начале 20 века на заседании Московского музыкального кружка положил начало исследованиям математических закономерностей, связанных с золотой пропорцией, в музыке. Он проанализировал музыкальные произведения Моцарта, Баха, Бетховена, Вагнера, Шопена, Глинки и других композиторов и показал, что в их произведениях присутствует эта «божественная пропорция». Кульминация многих музыкальных произведений располагается не в центре, а немного

смещена к концу произведения в соотношении 62:38 – это и есть точка золотой пропорции.

Доктор искусствоведения, профессор Л. Мазель заметил, изучая восьмитактные мелодии Шопена, Бетховена, Скрябина, что во многих творениях этих композиторов кульминация, как правило, приходится на слабую долю пятого, то есть на точку золотого сечения – 5/8.

Композитор и музыковед Л. Сабанеев изучил около двух тысяч творений разных композиторов и пришёл к выводу, что примерно в 75% случаев золотое сечение присутствовало в музыкальном произведении хотя бы один раз. Самое большое количество произведений, в которых встречается золотая пропорция, он отмечал у таких композиторов, как Аренский (95%), Бетховен (97%), Гайдн (97%), Моцарт (91%), Скрябин (90%), Шопен (92%), Шуберт (91%).

Это говорит о том, что метод золотого сечения активно применялся композиторами сознательно либо бессознательно. Вероятно, такое структурное расположение кульминационных моментов придает музыкальному произведению гармоническое звучание и эмоциональную окраску.

Кроме того, и сами музыкальные инструменты создавались по правилу золотого сечения. Например скрипки Страдивари в 17 веке создавались по чертежам в основе которых лежал данный принцип.

6. Математика и музыка в современном мире

В наши дни математика даёт не только подходы в изучении существующих музыкальных произведений, но и новые творческие возможности, новые способы «конструирования» музыки. Новая жизнь подобных подходов к написанию музыки связана с появлением мощной и доступной компьютерной техники. Начиная с середины 1990-х годов появилось множество компьютерных программ для анализа и создания музыкальных произведений. Современные компьютерные инструменты, помогающие композитору, меняют и само понятие «музыка». Теперь музыкальное произведение может быть предъявлено не только в виде нотной

записи или на барабанах шарманки, но и в виде кода компьютерной программы. Для композиторов, использующих математические идеи, разработаны системы программирования, являющиеся аналогом обычных языков программирования. Подобная система может представить результат своей работы по выполнению кода программы в виде нотной записи, а может и выступить в роли исполнителя.

7. Связь между музыкой, математикой и хорошей учебной работой

"Уроки музыки и искусств часто отодвигаются на самый задний план и финансируются по остаточному принципу, так как считается, что они мешают детям осваивать математику, естественные науки и язык. Мы показали, что это не так – чем больше дети занимались музыкой, тем лучше они учились", — рассказывает Питер Гузуасис из университета Британской Колумбии (Канада). Школьники, занимающиеся в музыкальных школах, заметно лучше справляются с математическими или языковыми экзаменами и тестами, чем остальные сверстники. Об этом пишут ученые, опубликовавшие результаты масштабных наблюдений за старшеклассниками в *Journal of Educational Psychology*.

Гузуасис и его коллеги решили проверить, действительно ли эта взаимосвязь существует. Для этого они проследили за успехами рекордно большой группы учащихся канадских школ, включавшей в себя свыше 100 тысяч старшеклассников, недавно сдавших выпускные или промежуточные экзамены. Анализируя эти данные, ученые разбили детей на две больших группы – тех, кто занимался музыкой, чье число составляло около 13%, и остальных школьников, не имевших подобного хобби.

"В среднем, дети, которые учились играть на инструменте в оркестре или в группе, примерно на год обгоняли сверстников по уровню своих знаний и навыков во всех дисциплинах. Скорее всего, необходимость понимать ноты, слаженно играть в коллективе и уметь очень тонко управлять своими руками играет важную роль в ускоренном саморазвитии этих детей" — заключает Гузуасис.

Кроме того, ученые обнаружили, что за решение алгебраических задач и обработку музыкальной информации отвечает один и тот же участок головного мозга.

Практическая часть

В качестве практической части своего исследования я решил проверить в действии закон Пифагора. С помощью преподавателя Саратовского областного колледжа искусств Шафеев Р.Р., который многие музыкальные инструменты делает самостоятельно, мы сделали кувиклы из пластиковой трубки, скотча и поролона. Для этого мы напильники трубочки длиной 23, 21, 19, 17, 15 сантиметров. Диаметр трубки 1,3см. Полученные трубки заткнули поролоном и стали настраивать, используя слух и пианино, либо специальное приложение в смартфоне, которым пользуются музыканты для настройки инструментов. С помощью палочки мы двигали поролон внутри трубки вверх, вниз пока не получали нужную ноту. Когда все трубочки были настроены мы их скрепили двусторонним скотчем в порядке убывания. Измерив полученную высоту внутри трубок, мы получили следующие результаты.

Таблица 1.

Сравнительный анализ соблюдения пропорций между звуками

Номер трубки	Фактическая длина трубки	Дробь	Расчетная длина трубки
Первая	15,4	1	15,4
Вторая	13,5	8/9	13,7
Третья	11,4	4/5	12,3
Четвертая	11,1	3/4	11,6
Пятая	9,9	2/3	10,3

Как видно из Таблицы 1 в большинстве случаев расчетные и фактические данные совпадают. Теория Пифагора подтверждается.

Кроме того, мне стало интересно проанализировать связь успеваемости и занятий музыкой.

Преподаватели Академии хорового искусства имени Попова В.С. в г. Москве, где сейчас учится моя сестра, отмечают, что 80% учащихся академии

по математике имеют 4 и 5. В этой академии дети углубленно занимаются музыкой и изучают общеобразовательные предметы по довольно сложной программе. Отбор в академию ведется именно по музыкальным способностям детей. В параллели 4х классов (5 классов) нашей гимназии – 21 человек занимается в музыкальной школе. По результатам опроса – 84% учащихся имеют по математике 4 и 5. Результаты исследования успеваемости по математике среди учащихся музыкальных школ подтверждают выводы Питера Гузуасиса.

Заключение.

В процессе своей исследовательской работы я узнал историю, изучил и собрал материал о связи музыки и математики. Выяснил какие математические закономерности используются в музыке. Узнал вклад ученых в исследование взаимосвязи музыки и математики. Сделал музыкальный инструмент используя математические закономерности и проверил действие музыкальных законов системы Пифагора. А также подтвердил взаимосвязь хорошей успеваемости с занятиями музыкой. Я многое открыл для себя в процессе работы, многое узнал.

Я выяснил, что у музыки есть четкие математические закономерности. Многие музыканты составляли свои произведения, опираясь на математические модели и законы, такие как золотое сечение. Это значит, что рациональность, логика и алгоритмы способны влиять на эмоции. Но и музыка и математика - искусство, они требуют чего-то ещё, что спускается свыше только человеку.

Я думаю, что в нашей школе нужно больше внимания уделять занятиям музыкой, рассказывать учащимся о пользе хорошей музыки и предлагаю слушать музыку в перерывах между занятиями.

Список литературы:

1. «Лучик» журнал для школьников № 1 2020г.
2. «Магия чисел» Э. Белл
3. «Математическая составляющая» Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин
4. «Математика и искусство» Волошинов А. В.
5. «Математика и музыка» Гейн А. Г., Касымов А. О.
6. «Мир чисел» Деплан И. Я.
7. «Пифагор и его школа» Жмудь Л. Я.
8. «Пифагор. Жизнь-как учение» Бореев Г.
9. «Числовые тайны музыки» Ценова В. С.
10. <https://zen.yandex.ru/media/id/607fe57401c7a11312045d62/muzyka-eto-matematika-60c5bfe82b8b16589ce07054>

Приложение







