Научно-исследовательская работа

Математика

ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ НАХОЖДЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Выполнил:
Гаснаш Владислав Романович
учащийся _5А_ класса
МБОУ Первомайская СОШ, Россия, с. Первомайское, обл. Томская

Руководитель:
Забелина Галина Михайловна
Учитель математики,
МБОУ Первомайская СОШ, Россия, с. Первомайское, обл. Томская

Содержание

Введение 3

1. Основная часть…………………………………………………………4

1.1. Площадь фигуры как сумма площадей её частей 4

1.2. Площадь фигуры как часть площади прямоугольника 5

1.3. Формула Пика 6

1.4. Задачи с практическим содержанием 8

1.5. Эксперимент и исследование 9

Заключение 11

Список использованных источников и литературы 10

Приложение 1. Георг Александр Пик. 11

Приложение 2. Банк задач.. 12

Приложение 3. Результаты эксперимента 15

Введение

Ещё в начальной школе мы изучали формулы нахождения площадей прямоугольника **S = a · b**, квадрата **S = a · a** и прямоугольного треугольника **S = (a · b) : 2**. При изучении математики в 5 классе мы тоже использовали эти формулы для вычисления площадей фигур. А также изучили основные свойства площадей: равные фигуры имеют равные площади; площадь фигуры равна сумме площадей её частей. В нашем учебнике мы встретили задачи на клетчатой бумаге на нахождение площадей фигур.

Мне стало очень интересно, какие способы решения таких задач существуют. При изучении литературы мы обнаружили, что их достаточное количество. Мы решили изучить их и проверить какой из них самый результативный, т.е. малозатратный по времени и дает безошибочный результат.

Проблема: Существует ли самый результативный способ нахождения площади фигуры на клетчатой бумаге?

Объект исследования: фигуры на клетчатой бумаге.

Предмет исследования: приёмы вычисления площадей фигур на клетчатой бумаге.

Цель работы: исследовать способы нахождения площади фигуры на клетчатой бумаге.

Гипотеза: задачи на нахождение площади фигур, изображённых на клетчатой бумаге, можно решить более рационально с помощью формулы отличной от школьной программы,

Задачи:

1. Изучить литературу по теме исследования.

2. Выбрать и изучить способы нахождения площадей фигур на клетчатой бумаге. Подобрать задачи.

3. Провести эксперимент.

4. Сделать выводы.

Методы исследования:

1) теоретический: изучение литературы;

2) эмпирический: эксперимент, анализ, сравнение;

3) математический: построение таблиц, вычисления.

Актуальность выбранной темы продиктована желанием показать разнообразие способов решения одной задачи. При решении олимпиадных задач мы часто оказывались в затруднении при встрече с задачами на клетчатой бумаге. А увидев такие задачи в КИМах ЕГЭ, решили обязательно исследовать задачи на клетчатой бумаге и помочь выпускникам освоить их, чтобы как можно меньше времени тратить на выполнение таких заданий.

Рассмотрим основные способы решения таких задач в нашей работе.

1. Основная часть

1.1. Площадь фигуры как сумма площадей её частей

Задача 1. Найдём площадь фигуры ABCD (см.рис.1). Если клетки размером 1х1см.

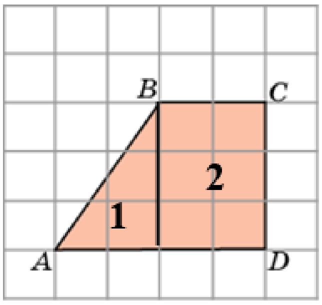


Рис.1

Разобьем фигуру ABCD на части (1 и 2).

По свойству площадей:

$S = S_1 + S_2 = (2 \cdot 3):2 + 3 \cdot 2 = 3 + 6 = 9$ см²

Ответ: 9 см²

Задача 2. Найдём площадь фигуры ABCD (см.рис.2). Если клетки размером 1х1см.

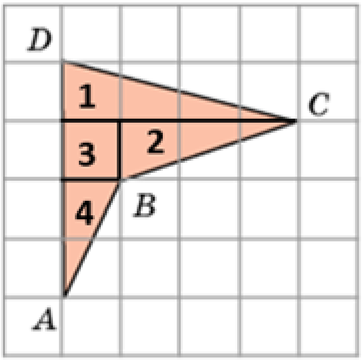


Рис.2

Разобьем фигуру ABCD на части (1, 2, 3 и 4).

По свойству площадей:

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$

$= (1 \cdot 4):2 + (1 \cdot 3):2 + 1 \cdot 1 + (1 \cdot 2):2 =$

$= 2 + 1{,}5 + 1 + 1 = 5{,}5$ см²

Ответ: 5,5 см²

Задача 3. Найдём площадь фигуры ABCD (см.рис.3). Если клетки размером 1х1см.

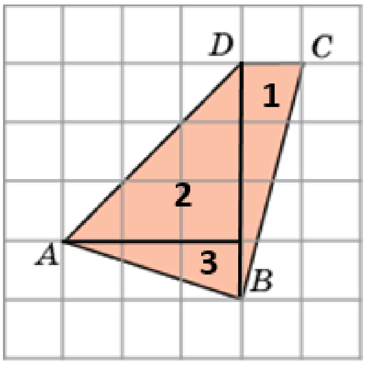


Рис.3

Разобьем фигуру ABCD на части (1, 2 и 3).

По свойству площадей:

$S = S_1 + S_2 + S_3 =$

$= (1 \cdot 4):2 + (3 \cdot 3):2 + (1 \cdot 3):2 =$

$= 2 + 4{,}5 + 1{,}5 = 8$ см²

Ответ: 8 см²

1.2. Площадь фигуры как часть площади прямоугольника

Задача 4. Найдём площадь фигуры ABCD (см.рис.4). Если клетки размером 1х1см.

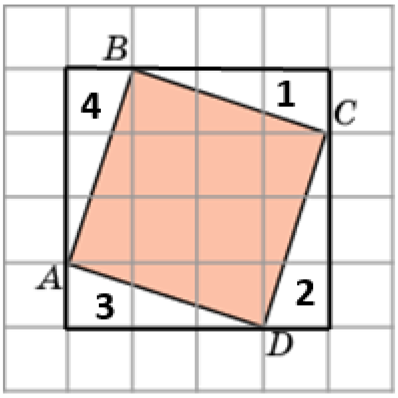


Рис.4

Опишем около фигуры ABCD прямоугольник.

Из площади прямоугольника (в данном случае это квадрат) вычтем площади полученных простых фигур (1, 2, 3 и 4):

$S = S_{пр} – S_1 – S_2 – S_3 – S_4 = = 4·4 – (3·1):2 – (3·1):2 – (3·1):2 – (3·1):2 = 16 – 1,5 – 1,5 – 1,5 – 1,5 = 10$ см²

Ответ: 10 см²

Задача 5. Найдём площадь фигуры ABCD (см.рис.5). Если клетки размером 1х1см.

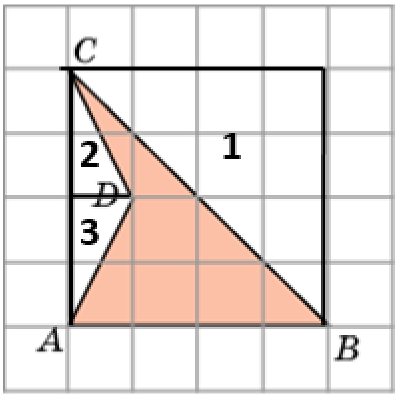


Рис.5

Опишем около фигуры ABCD прямоугольник.

Из площади прямоугольника (в данном случае это квадрат) вычтем площади полученных простых фигур (1, 2 и 3):

$S = S_{пр} – S_1 – S_2 – S_3 = 4·4 – (4·4):2 – (2·1):2 – (2·1):2 = 16 – 8 – 1 – 1 = 6$ см²

Ответ: 6 см²

1.3. Формула Пика

Линии, идущие по сторонам клеток, образуют сетку, а вершины клеток – узлы этой сетки.

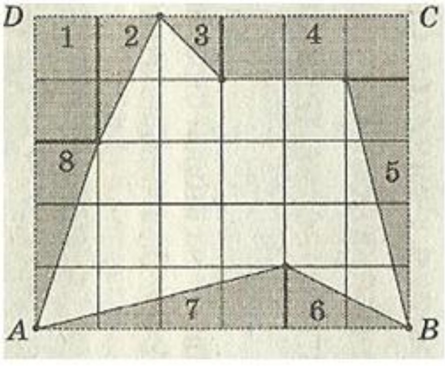


Рис.6

Нарисуем на листе многоугольник с вершинами в узлах (рис. 6) и найдем его площадь. Оказывается, площади многоугольников, вершины которых расположены в узлах сетки, можно вычислять гораздо проще: есть формула, связывающая их площадь с количеством узлов, лежащих внутри и на границе многоугольника.

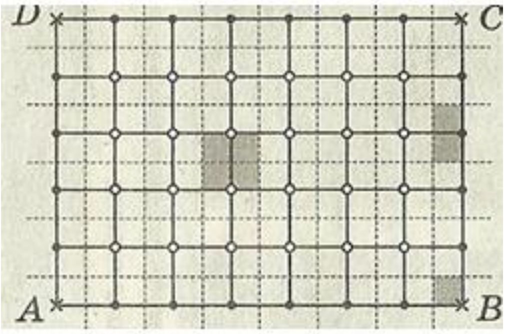


Рис.7

Пусть ABCD – прямоугольник с вершинами в узлах и сторонами, идущими по линиям сетки (рис.7). Обозначим через В количество узлов, лежащих внутри прямоугольника, а через Г – количество узлов на его границе. Сместим сетку на полклетки вправо и полклетки вниз. Тогда территорию прямоугольника можно «распределить» между узлами следующим образом: каждый из В узлы «контролирует» целую клетку смещённой сетки, а каждый из Г узлов – 4 граничных не угловых узла – половину клетки, а каждая из угловых точек – четверть клетки. Поэтому площадь прямоугольника

$$S = В + \frac{Г-4}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = В + \frac{Г}{2} - 1.$$

Итак, для прямоугольников с вершинами в узлах и сторонами, идущими по линиям сетки, мы установили формулу $\mathbf{S = В + \frac{Г}{2} - 1.}$ Оказывается, эта формула верна не только для прямоугольников, но и для произвольных многоугольников с вершинами в узлах сетки! Это и есть формула Пика.

Она секретной не является. Информация о ней в интернете имеется. Об этой формуле обычно рассказывается применительно к нахождению площади треугольника. На примере треугольника мы её и рассмотрим. Автор этой формулы австрийский математик Георг Пик (приложение 1).

Можно убедиться в том, что формула Пика верна для всех рассмотренных выше примеров.

Оказывается, что если многоугольник можно разрезать на треугольники с вершинами в узлах сетки, то для него верна формула Пика.

Рассмотрим применение формулы Пика на примерах.

Задача 6. Найдем площадь пятиугольника (см.рис.8).

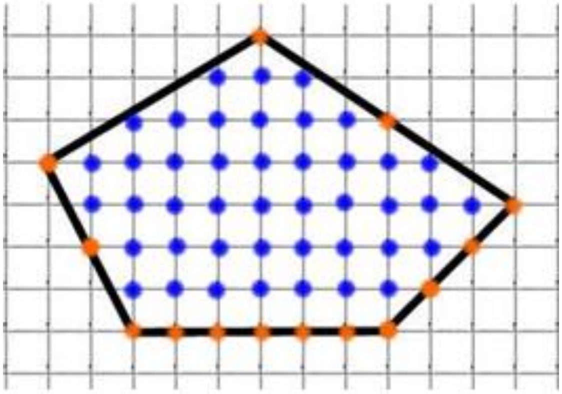


Рис.8

Отметим узлы (пересечение линий) на границе пятиугольника и внутри пятиугольника:

В = 43 (обозначены синим),

Г = 14 (обозначены оранжевым).

S= 43 + 14/2 – 1 = 49 ед^2

Ответ: 49

Конечно, есть ещё способы нахождения фигур на клеточной бумаге. Например, можно просто считать количество целых клеток внутри фигуры, а из оставшихся кусочков «складывать» целые клетки, но это довольно долго и трудно, особенно если фигура сложной формы.

Можно находить площади фигур на клеточной бумаге, используя формулы площади произвольного треугольника, трапеции, ромба, параллелограмма. Но для этого нужно знать эти формулы и уметь ими пользоваться.

И есть такие фигуры на клеточной бумаге, для которых эти формулы применить очень трудно, да и затратно по времени. А на экзамене по математике в 9-м и в 11-м классе каждая минута дорога!

1.4. Задачи с практическим содержанием

Поможет нам формула Пика и для решения геометрических задач с практическим содержанием, когда объект изображен на клетчатой бумаге в масштабе. [4]

Задача 7. Найдите площадь лесного массива (в м²), изображённого на плане с квадратной сеткой 1 × 1см в масштабе 1 см – 200 м (рис. 9).

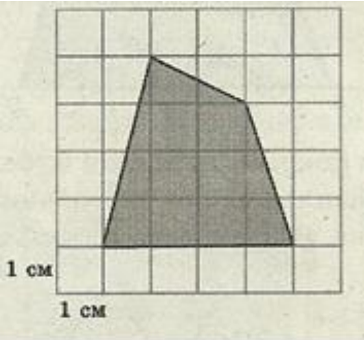


Рис. 9

Найдём S площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге по формуле Пика: $S = В + \frac{Г}{2} - 1$

В = 8, Г = 7.

$S = 8 + 7/2 - 1 = 10{,}5$ см²

Т.к. 1 см² - 200² м², то

$S_{массива} = 40000 \cdot 10{,}5 = 420\,000$ м²

Ответ: 420 000 м²

Задача 10. Найдите площадь поля (в м²), изображённого на плане с квадратной сеткой 1 × 1см в масштабе 1 см – 100 м (рис. 12).

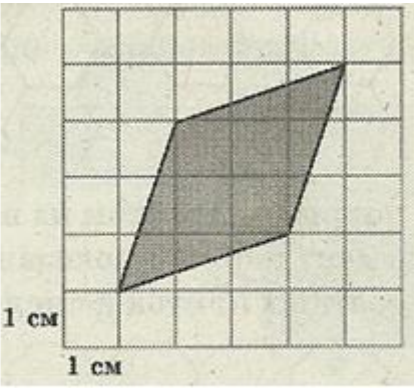


Рис. 10

Найдём S площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге по формуле Пика: $S = В + \frac{Г}{2} - 1$.

В = 7, Г = 4.

$S = 7 + 4/2 - 1 = 8$ см², т.к. 1 см² - 100² м², то

$S_{поля} = 10000 \cdot 8 = 80\,000$ м²

Ответ: 80 000 м²

1.5. Эксперимент и исследование

Мы решили провести эксперимент для того, чтобы выяснить какой из рассмотренных способов является самым эффективным, т.е. результативным (решение без ошибок) и малозатратным по времени. Рассматривая эти способы на примерах, мы выдвинули **гипотезу**: самым эффективным будет решение задач по формуле Пика.

Обучающимся 9А, 9В классов мы напомнили и объяснили способы нахождения площадей фигур на клетчатой бумаге. Ученики решали задачи с помощью способов описанных в п.2.1, 2.2 (приложение 2). Каждому нужно было решить 4 задачи и засечь время их выполнения.

Затем мы рассказывали им о формуле Пика, показали на примерах её применение и предложили решить те же задачи, но по формуле Пика (снова засекали время).

Результаты эксперимента представлены в таблице (приложение 3).

Общие результаты эксперимента:

	Затраченное время - среднее значение (мин)			Количество допущенных ошибок			Количество безошибочных работ		
	T1	T2	T1/T2	O1	O2	O1/O2	Э1	Э2	Э2/Э1
11 класс (32 ученика)	**6,1**	**2,4**	**2,5**	**23**	**2**	**8**	**16**	**30**	**1,9**

T_1 – время, затраченное на решение задач известными способами,

T_2 – время, затраченное на решение задач по формуле Пика,

O_1 – количество ошибок, допущенное при решении задач по известным формулам,

O_2 – количество ошибок, допущенное при решении задач по формуле Пика,

$Э_1$ – количество безошибочных работ при решении задач известными способами,

$Э_2$ – количество безошибочных работ при решении задач по формуле Пика.

Заключение

Проведенный эксперимент показал, что:

1) никто из учеников не знал формулу Пика;
2) время, затраченное на решение задач по формуле Пика, сократилось в 2,5 раза;
3) количество ошибок, допущенных при решении задач по формуле Пика, сократилось в 8 раз;
4) 16 учащихся допустили ошибки при решении задач известными способами; 2 учащихся допустили ошибки при решении задач, используя формулу Пика;
5) количество безошибочных работ увеличилось почти в 2 раза.

Вывод: Существует достаточное количество способов нахождения площадей фигур на клетчатой бумаге. Мы рассмотрели основные из них. Задачи, поставленные в самом начале нашей работой, выполнили. Все способы нахождения площадей фигур на клетчатой бумаге хороши, но самым результативным оказался способ решения по формуле Пика!

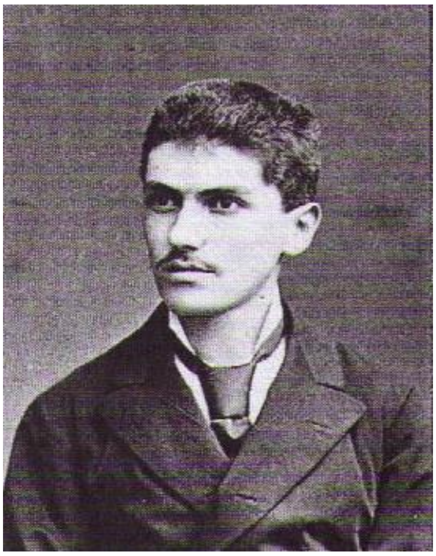
Наша гипотеза подтвердилась. А тем выпускникам, которые недостаточно знают формулы площадей фигур или имеют проблемы с геометрией, эта работа – неоспоримая помощь в подготовке к выполнению таких заданий.

Список литературы и источников

1. Математика: 5 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений /А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — М.: Вентана-Граф, 2014.
2. Жарковская Н. М., Рисс Е. А. Геометрия клетчатой бумаги. Формула Пика // Математика, 2009, № 17. – [Электронный ресурс] – URL: http://mat.1september.ru/2009/23/gazeta_23_09.pdf
3. ФИПИ. Открытый банк заданий ЕГЭ 2020 по математике. – [Электронный ресурс] – URL: http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege

4. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия на клетчатой бумаге. – М.: Чистые пруды, 2009.
5. Википедия. Формула Пика. – [Электронный ресурс] – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D4%EE%F0%EC%F3%EB%E0_%CF%E8%EA%E0
6. Википедия. Пик. Георг. – [Электронный ресурс] – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8%D0%BA,_%D0%93%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B3

Приложение 1. Георг Алекса́ндр Пик



Георг Алекса́ндр Пик (10 августа, 1859 - 26 июля 1942) был австрийским математиком. Он умер в концлагере Терезин. Сегодня он известен из-за формулы Пика для определения площади решетки полигонов. Он опубликовал свою формулу в статье в 1899 году, она стала популярной, когда Хьюго Штейнгауз включил её в 1969 году в издание математических снимков.

Пик учился в Венском университете и защитил кандидатскую в 1880 году. После получения докторской степени он был назначен помощником Эрнеста Маха в Шерльско-Фердинандском университете в Праге. Он стал преподавателем там в 1881 году. Взяв отпуск в университете в 1884 году, стал работать с Феликсом Клейном в Лейпцигском университете. Он оставался в Праге до своей отставки в 1927 году, а за тем вернулся в Вену.

Пик возглавлял комитет в(тогда) немецком университете Праги, который назначил Альберта Эйнштейна профессором кафедры математической физики в 1911 году.

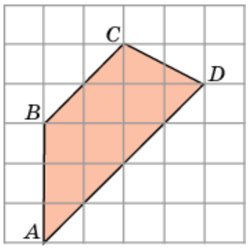
Пик был избран членом Чешской академии наук и искусств, но был исключен после захвата нацистами Праги.

После ухода на пенсию в 1927 году, Пик вернулся в Вену, город, где он родился. После аншлюса, когда нацисты вошли в Австрию 12 марта 1938 года, Пик вернулся в Прагу. В марте 1939 года нацисты вторглись в Чехословакию. Георг был отправлен в концентрационный лагерь Терезин 13 июля 1942. Он умер через две недели.

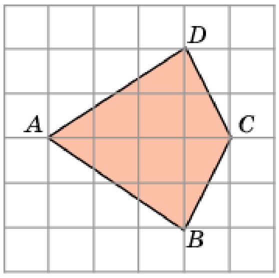
Формула Пика была открыта австрийским математиком Георгом Пиком в 1899 году. Теорема Пика для расчёта площади многоугольника получила широкую известность. В Германии эта теорема включена в школьные учебники.

Приложение 2. Банк задач

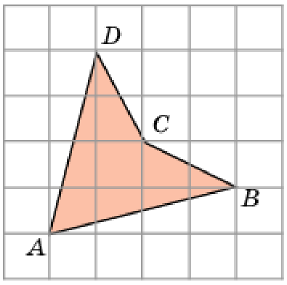
1. Найдите площадь трапеции ABCD, считая стороны квадратных клеток равными 1.



2. Найдите площадь четырехугольника ABCD, считая стороны квадратных клеток равными 1.

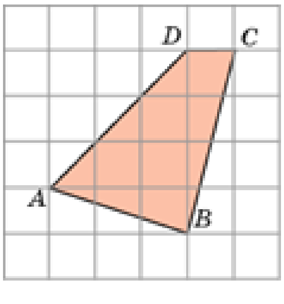


3. Найдите площадь четырехугольника *ABCD*, считая стороны квадратных клеток равными 1.



4. Найдите площадь четырехугольника *ABCD*, считая стороны квадратных клеток равными 1.

5. Найдите площадь четырехугольника ABCD, считая стороны квадратных клеток равными 1.



Приложение 3. Результаты эксперимента

Результаты эксперимента в 9-м классе:

	Затраченное время			Количество ошибок		
	T1	T2	T1/T2	O1	O2	O1/O2
1/9	5	3	-	1	0	-
2/9	7	2	-	3	1	-
3/9	5	2	-	0	0	-
4/9	3	2	-	0	0	-
5/9	3	2	-	0	0	-
6/9	4	2	-	0	0	-
7/9	9	3	-	2	1	-
8/9	6	2	-	1	0	-
9/9	6	3	-	0	0	-
10/9	5	2	-	0	0	-
11/9	9	3	-	1	0	-
12/9	6	3	-	2	0	-
13/9	5	2	-	0	0	-
14/9	4	2	-	0	0	-
15/9	7	3	-	1	0	-
16/9	8	3	-	2	0	-
17/9	8	2	-	1	0	-
18/9	4	2	-	0	0	-
19/9	7	2	-	1	0	-
20/9	8	3	-	0	0	-
21/9	6	3	-	0	0	-
22/9	5	2	-	0	0	-
23/9	9	3	-	1	0	-
24/9	6	3	-	2	0	-
25/9	5	2	-	0	0	-
26/9	4	2	-	0	0	-
27/9	7	3	-	1	0	-
28/9	8	3	-	2	0	-
29/9	8	2	-	1	0	-
30/9	4	2	-	0	0	-
31/9	7	2	-	1	0	-
32/9	8	3	-	0	0	-
Всего (32 ученика)	**196**	**78**	**2,5**	**23**	**2**	**11,5**

T_1 – время, затраченное на решение задач известными способами,

T_2 – время, затраченное на решение задач по формуле Пика.

O_1 – количество ошибок, допущенное при решении задач по известным формулам,

O_2 – количество ошибок, допущенное при решении задач по формуле Пика.