Научно-исследовательская работа

Математика

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ОТНОШЕНИЯ ДЛИН

Выполнила:
Глазырина Елизавета Евгеньевна
учащаяся 11А класса
МБОУ Первомайская СОШ, Россия, с. Первомайское, обл. Томская

Руководитель:
Забелина Галина Михайловна
Учитель математики,
МБОУ Первомайская СОШ, Россия, с. Первомайское, обл. Томская

Содержание

Введение

Каждый из нас в детстве качался на качелях, и мы замечали, что если наш товарищ тяжелее, то он качели перевешивал. Если же товарищ передвинется ближе к центру, то качели уравновесятся. Но возникает вопрос: насколько ближе нужно передвинуться, чтобы качели уравновесились? На этот вопрос нам поможет ответить метод нахождения центра масс.

Родоначальником этого метода был великий древнегреческий мыслитель Архимед. Изучая тему «Замечательные точки треугольника», мы узнали, что одной из замечательных точек треугольника является точка пересечения медиан, которую называют центроидом треугольника или центром масс. Еще в III в до н. э., Архимед обнаружил возможность доказывать новые математические факты с помощью свойств центра масс.

В частности, этим способом Архимед доказал теорему о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1. В его основе лежит понятие центра масс, который называют барицентр.

Актуальность: Среди олимпиадных заданий часто встречаются задачи на отношение длин. Такие задания есть в заданиях повышенной сложности ОГЭ и ЕГЭ по математике. Как показывает практика, большинство учащихся не умеет решать данные задачи. Решить такие задачи методами школьной математики довольно сложно. Но за решение данных задач ставят высокий балл на экзаменах.

Передо мной встала **проблема:** при помощи дополнительной литературы выявить различные нетрадиционные способы решения геометрических задач на отношение длин, которые не изучаются на уроках математики.

Гипотеза: Если я изучу способы решения задач на отношения длин, включая нетрадиционные, выявлю сложности, возникающие при решении таких задач, то найду рациональный способ решения.

Объект исследования: Геометрические задачи на нахождение отношения длин отрезков.

Предмет исследования: Способы решения геометрических задач на отношения длин.

Цель исследовательской работы: Исследование методов решения геометрических задач на отношение длин.

Ззадачи:

1. Исследовать методы решения задач на отношения длин.
2. Сделать подборку задач ОГЭ и ЕГЭ, решаемых с помощью данных методов.
3. Применить изученные методы к решению задач.

Методы исследования:

- поисково-исследовательский;
- теоретический;

Основная часть

1. Введение понятия центра масс

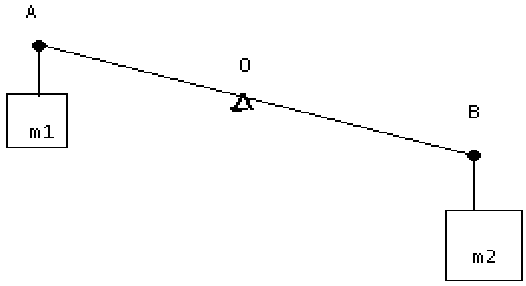
Каждый из нас в детстве качался на качелях, и мы замечали, что если наш товарищ тяжелее, то он качели перевешивал. Проведём эксперимент: если товарищ передвинется ближе к центру, то качели уравновесятся. Но возникает вопрос: насколько ближе нужно передвинуться, чтобы качели уравновесились? На этот вопрос нам поможет ответить метод нахождения центра масс.

Обоснуем этот пример математически. Пусть есть качели, обозначенные в виде отрезка АВ, и будем их считать невесомыми, причём в точки А и В подвешены гирьки с массами m1 и m2.

$m_2 > m_1$

Для определённости будем считать, что $m_2 > m_1$. Где в этом случае та точка, которая уравновесит наши качели?

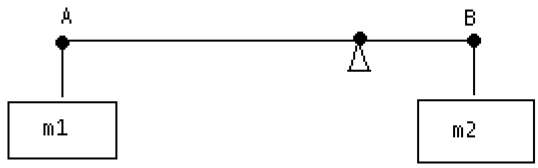
Понятно, что если эту точку поставить в середине отрезка, то гирька m_2 перевесит.



Имеет место следующая теорема:

Теорема: Центром масс данной системы двух точек будет такая точка О данного отрезка, что произведение АО * m_1 = ВО * m_2 или $\frac{AO}{BO} = \frac{m_2}{m_1}$.

Таким образом точка О разбивает наш отрезок АВ в отношении, обратно пропорциональном тем массам, которые находятся в точках А и В.



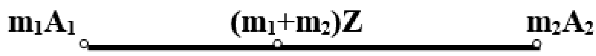
$m_2 > m_1$

2. Основные свойства центра масс

Центр масс любой системы обладает следующим основными свойствами:

1. Существование и единственность:

Любая система материальных точек имеет центр масс, и притом только один.



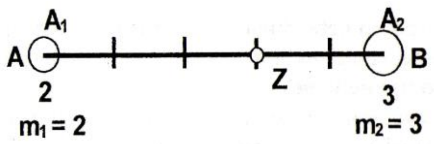
2. Однородность:

Если массу каждой точки системы умножить на одно и то же положительное число, то есть уменьшить или увеличить одновременно в одинаковое число раз, то центр масс не изменится.

3. Правило рычага:

Центр масс Z системы, состоящей из двух материальных точек m_1A_1 и m_2A_2, расположен на прямой, проходящей через обе эти точки. Причём, если m_1 и m_2 одного знака, то центр масс принадлежит отрезку A_1A_2 (ближе к более массивной точке); а если m_1 и m_2 разных знаков, то барицентр лежит за пределами отрезка, то есть на прямой, содержащей этот отрезок. Причём правило рычага остаётся справедливым в обоих случаях, то есть

$ZA_1:ZA_2=m_2:m_1$.



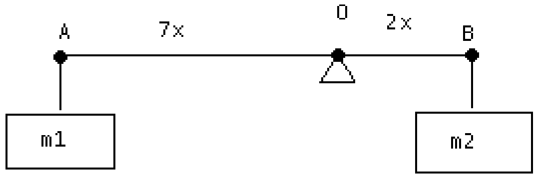
4. Правило группировки:

Если систему материальных точек с центром масс в точке Z разбить на несколько непересекающихся подсистем и нагрузить центр масс каждой подсистемы суммарной массой соответствующей подсистемы (рис.2), а затем рассмотреть систему из образованных таким образом материальных точек, то центр масс этой подсистемы совпадает с точкой Z.

Пример 1. Пусть масса, расположенная в точке A равна 400 грамм, т. е. m1=400 г, а m2=1,4 кг. Найти положение центра масс.

Решение:

Для начала переведем всё в граммы.



m_2=1,4 кг = 1400 г.

$$\frac{AO}{BO}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{1400}{400}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\frac{AO}{BO}=\frac{7}{2}$.

Возникает вопрос: ***«Где же тут геометрия?»***

3. Центроид треугольника. Теорема о медианах треугольника

Разберём следующую задачу: попытаемся найти центр масс не отрезка, а треугольника.

Из курса геометрии 8 класса нам известно теорема о медианах треугольника:

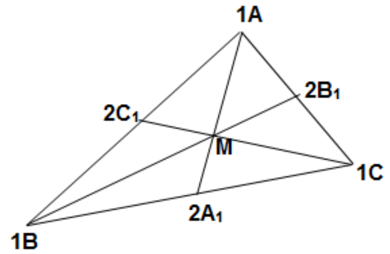
В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке, и каждая из них делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

Эту теорему доказал Архимед и в некоторых книгах ее называют теоремой Архимеда. Для ее доказательства он использовал центр масс.

Дано: ΔABC- произвольный, AA_1, BB_1, CC_1 - медианы

Доказать: $AO:OA_1 = 2:1$, $BO:OB_1 = 2:1$, $CO:OC_1 = 2:1$.

Доказательство:



Нагрузим вершины треугольника единичными массами:

Помещаем в вершину A массу, равную единице. Поскольку точка B_1 делит сторону AC пополам, то и в точку C должна быть помещена масса, равная единице. Аналогично и в точку B, т. к. A_1 - тоже середина.

Система двух материальных точек B и C, согласно свойству существования центра масс, имеет центр масс – некоторую точку A_1. расположенную по правилу рычага, в середине отрезка BC, с суммарной массой 2.

Аналогично, для материальных точек A и C – центр масс B_1 в середине отрезка AC, с суммарной массой 2;

Аналогично, для материальных точек A и B – центр масс C_1 в середине отрезка AB, с суммарной массой 2.

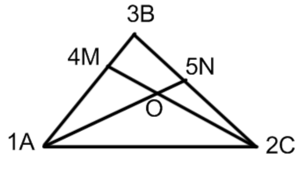
Рассмотрим материальные точки 1B, $2B_1$ с центром масс в точке M. Тогда по правилу рычага имеем $BM:MB_1 = 2:1$. Таким образом, приходим к выводу, что центр масс расположен на медиане, проведенной из вершины B, и делит ее отношении 2 : 1.

Аналогично для материальных точек 1A, $2A_1$ с центром масс в точке M. Тогда по правилу рычага имеем $AM:MA_1 = 2:1$.

Аналогично для материальных точек 1C, $2C_1$ с центром масс в точке M. Тогда по правилу рычага имеем $CM:MC_1 = 2:1$.

4. Применение барицентрического метода при решении задач

Задача 1. *Дан треугольник ABC, на его сторонах AB и BC выбраны соответственно точки M и N, так, что AM:MB=3:1 и BN:NC =2:3. Найти в каком отношении делятся точкой пересечения O отрезки CM и AN?*



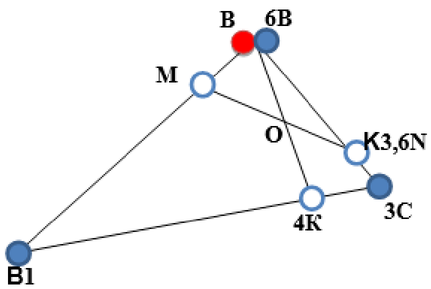
Решение:

Нагрузим точки A, B, C, массами таким образом, чтобы центр масс системы **AB** находился в точке M, а системы **BC** в точке N. Если в точку A поместить массу 1, то по правилу рычага в точку B следует поместить массу 3. Ну а теперь, для того, чтобы центр масс точек B и C находился в точке N, согласно правилу рычага в точку C нужно поместить массу 2. Масса в точке M равна 1+3=4, а масса в точке N равна 2+3=5.

Учитывая, что центр масс всей системы можно находить последовательно, то центр масс системы **(AB)C** совпадает с центром масс системы **(BC)A**, получаем, что центр масс системы **MC,** то есть системы **(AB)C**, лежит на отрезке MC и делит его в отношении 2:4. А центр масс системы **NA** лежит на отрезке NA и делит его в отношении 5:1. Значит, MO:OC=1:2, а AO:ON=5:1.

Ответ: MO:OC=1:2, AO:ON=5:1.

Задача 2. *Дан треугольник ABC, на его сторонах AB, BC и AC выбраны соответственно точки M, N и K так, что AM:MB=5:1, BN:NC =5:1 и AK:KC=3:1. Найти в каком отношении делятся точкой пересечения отрезки MN и BK?*



Решение:

Нагрузим точки A, B, C массами таким образом, чтобы центр масс системы **AB** находился в точке M, а системы **BC** в точке N, а системы **AC** в точке K.

Загрузим точки A и C такими массами, чтобы их центром оказалась точка K; очевидно, достаточно (в силу правила рычага) поместить в A массу 1 (т. е. рассмотреть материальную точку 1A), а в C – массу 3 (материальная точка 3C).

Далее, имея уже материальную точку 1A, подберём для точки B такую массу x, чтобы точка M оказалась центром масс двух м. т. 1A и xB. По правилу рычага имеем $1 \cdot |AM| = x\,|MB|$, откуда $x = \frac{1 \cdot |AM|}{|MB|} = \frac{1 \cdot 5}{1} = 5$. Следовательно, в точку B помещаем массу 5 (материальная точка 5B).

Наконец, имея материальную точку 3C, подберём для точки B другую массу y так, чтобы точка N оказалась центром масс двух м. т. 3C и yB. По правилу рычага имеем $3\,|CN| = y\,|NB|$, откуда $y = \frac{3 \cdot |CN|}{|NB|} = \frac{3 \cdot 1}{5} = 0{,}6$. Следовательно, в точку B помещаем массу 0,6 (материальная точка 0,6B).

У нас возникла новая ситуация: кроме материальных точек 1A и 3C, мы имеем в точке B две различные массы 5 и 0,6. Рассмотрим систему из всех четырёх материальных точек 1A, 5B, 3C и 0,6B. Её центр масс обозначим через O. Перенесём массы материальных точек 1A и 5B в их центр масс M, а массы материальных точек 3C и 0,6B – в их центр масс N. Тогда O окажется центром масс лишь двух материальных точек 6M и 3,6N. Значит $O \in [MN]$. Мы могли бы и иначе сгруппировать те же четыре материальные точки: перенести массы материальных точек 1А и 3С в их центр масс К, а вместо 5В и 0,6В рассмотреть одну материальную точку 5,6В. Тогда О окажется центром масс двух материальных точек 4К и 5,6В. Поэтому О $\in$ [ВК].

Следовательно, О – точка пересечения отрезков MN и ВК. Так как О центр масс материальных точек 5,6В и 4К, то 5,6·|ВО|=4·|КО|, так что $\frac{|BO|}{|KO|} = \frac{4}{5,6} = \frac{40}{56} = \frac{5}{7}$.

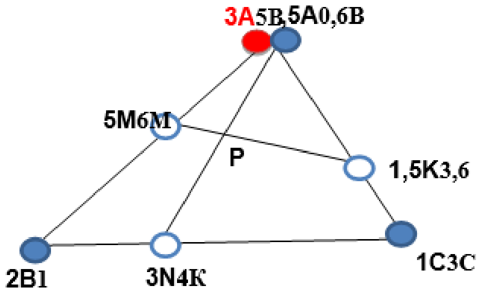
Аналогично убедимся, что 6·|МО| = 3,6·|NO|, откуда $\frac{|MO|}{|NO|} = \frac{3,6}{6} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$.

Ответ: MO:ON=5:3, BO:OK=5:7.

Задача 3. (1-ый способ). *На сторонах АВ, ВС и АС треугольника АВС взяты соответственно точки M, N и K так, что AM : MB = 2:3, AK : KC = 2:1, BN : NC = 1:2. В каком отношении прямая МК делит отрезок AN?*

Дано: ΔАВС, М∈АВ, N∈ВС, К∈АС, AM:MB=2:3, AK:KC=2:1, BN:NC=1:2.

Найти: AP:PN.



Решение:

Нагрузим точки А, В, С массами таким образом, чтобы центр масс системы **АВ** находился в точке М, а системы **ВС** в точке N, а системы **АС** в точке К.

Загрузим точки А и В такими массами, чтобы их центром оказалась точка М; очевидно, достаточно (в силу правила рычага) поместить в В массу 2 (т. е. рассмотреть материальную точку 2В), а в А – массу 3 (материальная точка 3А).

Загрузим точки В и С такими массами, чтобы их центром оказалась точка N; очевидно, достаточно (в силу правила рычага) поместить в С массу 1 (т. е. рассмотреть материальную точку 1С), а в В – массу 2 (материальная точка 2В).

Далее, имея уже материальную точку 1С, подберём для точки А другую такую массу ***x***, чтобы точка К оказалась центром масс двух м. т. 1С и *x*А. По правилу рычага имеем $1 \cdot |KC| = x \cdot |AK|$, откуда $x = \frac{1 \cdot |KC|}{|AK|} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0,5$.

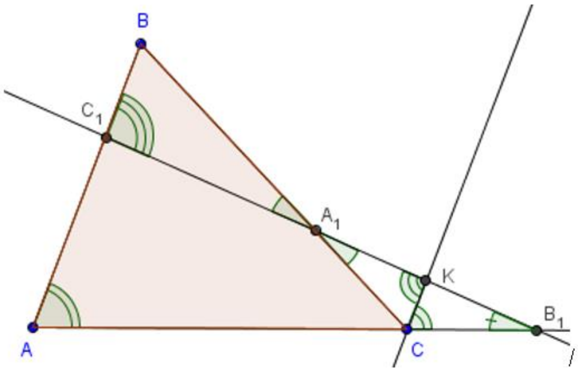
Следовательно, в точку А помещаем массу 0,5 (материальная точка 0,5А).

Так как Р центр масс материальных точек 3,5А и 3N, то 3·|PN|=3.5·|AP|, следовательно $\frac{|AP|}{|PN|} = \frac{3}{3.5} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$.

Ответ: AP:PN=6:7.

5. Решение задач на отношение отрезков с помощью теоремы Менелая

Теорема Менелая. *Пусть прямая пересекает треугольник ABC, причём C_1 – точка пересечения со стороной AB, A_1 – точка пересечения со стороной BC, B_1 – точка пересечения с продолжением стороны AC. Тогда выполняется равенство:* $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$



Доказательство:

Проведём через точку C прямую CK параллельно AB (K – точка пересечения с C_1B_1)

Пусть A_1,B_1,C_1 лежат на одной прямой, причем A_1 – на стороне BC, C_1– на стороне AB, B_1– на продолжении стороны AC за точку C.Докажем справедливость равенства (1). Проведем CK ll AB.

$\triangle KCB_1 \sim \triangle C_1AB_1$ по II признаку,$\Rightarrow \frac{KC}{AC_1}=\frac{CB_1}{AB_1} \Rightarrow KC=\frac{CB_1 \cdot AC_1}{AB_1}$ (1)

$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CKA_1$ по II признаку,$\Rightarrow \frac{BC_1}{KC}=\frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow KC=\frac{BC_1 \cdot A_1C}{BA_1}$ (2)

Из (1) и (2) имеем $\frac{CB_1 \cdot AC_1}{AB_1}=\frac{BC_1 \cdot A_1C}{BA_1}$. Разделив обе части этого равенства на $\frac{BC_1 \cdot A_1C}{BA_1}$, получим равенство $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

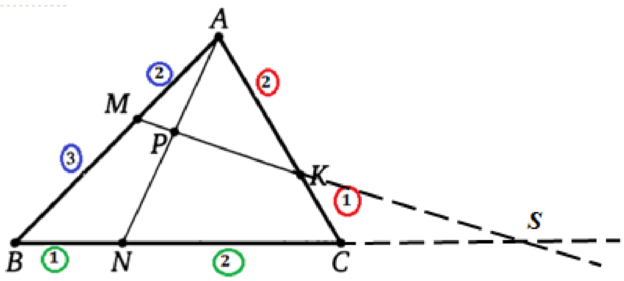
Обратная теорема Менелая. Пусть дан треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC, AB соответственно. Три точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Задача 3 (2-ой способ): *На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K так, что AM :MB = 2 : 3, AK : KC = 2 : 1, BN : NC = 1 : 2. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN?*

Дано: ΔABC, M∈AB, N∈BC, K∈AC, AM:MB=2:3, AK:KC=2:1, BN:NC=1:2.

Найти: AP:PN.



Решение:

1) Продлим прямую МК до пересечения с прямой ВС, МК не параллельна ВС, так как $\frac{AM}{MB} \neq \frac{AK}{KC}$. Обозначим S – точка пересечения МК и ВС.

2) Рассмотрим ΔАВС с секущей MS. Точки М, К и S лежат на одной прямой, значит, по теореме Менелая:

$$\frac{BM}{MA} \cdot \frac{AK}{KC} \cdot \frac{CS}{SB} = 1$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{CS}{SB} = 1 \Rightarrow \frac{CS}{SB} = \frac{1}{3}.$$

3) Выразим NS через SB:

$$NS = NC + CS = \frac{2}{3}BC + \frac{1}{3}SB =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}SB\right) + \frac{1}{3}SB = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3}SB\right) = \frac{7}{9}SB.$$

4) Рассмотрим ΔВАN с секущей MS. Точки М, Р и S лежат на одной прямой, значит, по теореме Менелая:

$$\frac{BM}{MA} \cdot \frac{AP}{PN} \cdot \frac{NS}{SB} = 1$$

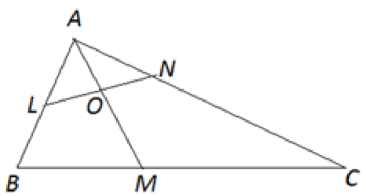
$$\frac{3}{2} \cdot \frac{AP}{PN} \cdot \frac{\frac{7}{9}SB}{SB} = 1,$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{AP}{PN} \cdot \frac{7}{9} = 1,$$

$$\frac{AP}{PN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{7} = \frac{6}{7}.$$

Ответ: AP : PN = 6 : 7

6. Решение задач на отношение отрезков с помощью площадей

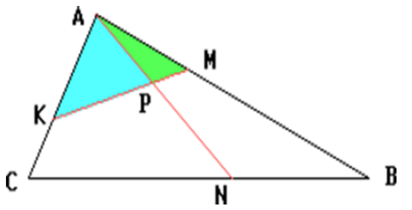


$S_{\Delta ACM} = \frac{CM}{BC} \cdot S_{\Delta ABC}$, $S_{\Delta ABM} = \frac{BM}{BC} \cdot S_{\Delta ABC}$

$S_{\Delta ANO} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AO}{AM} \cdot S_{\Delta ACM}$, $S_{\Delta ALO} = \frac{AL}{AB} \cdot \frac{AO}{AM} \cdot S_{\Delta ABM}$

$S_{\Delta ANL} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AL}{AB} \cdot S_{\Delta ABC}$

Задача 3 (3-ий способ): *На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точкиM, N и K так, что AM :MB = 2 : 3, AK : KC = 2 : 1, BN : C = 1 : 2. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN?*
Дано: ∆ABC, M∈AB, N∈BC, K∈AC, AM:MB=2:3, AK:KC=2:1, BN:NC=1:2.
Найти: AP:PN.
Решение:



Пусть P — точка пересечения прямой MK с отрезком AN. Обозначим $\frac{AP}{AN} = x$ и $S_{\Delta ABC} = S$.

Тогда

$$S_{\Delta ABN} = \frac{BN}{BC} \cdot S = \frac{1}{3}S,\ \ S_{\Delta ACN} = \frac{CN}{BC} \cdot S = \frac{2}{3}S,$$

$$S_{\Delta AMP} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AN} \cdot S_{\Delta ABN} = \frac{2}{5} \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot S = \frac{2}{15}xS,$$

$$S_{\Delta AKP} = \frac{AK}{AC} \cdot \frac{AP}{AN} \cdot S_{\Delta ACN} = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{4}{9}xS,$$

$$S_{\Delta AMK} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AK}{AC} \cdot S = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{4}{15}S.$$

Поскольку $S_{\Delta AMK} = S_{\Delta AMP} + S_{\Delta AKP}$, то

$$\frac{2}{15}xS + \frac{4}{9}xS = \frac{4}{15}S.$$

Отсюда находим, что $x = \frac{6}{13}$. Следовательно, $\frac{AP}{PN} = \frac{6}{7}$.

Ответ: AP:PN=6:7

Заключение

- ✓ В процессе исследования методов решения геометрических задач на отношение длин найден оригинальный способ с использованием свойств центра масс.
- ✓ Изученный барицентрический метод позволяет расширить знания по геометрии за рамки школьного курса.
- ✓ Проведено исследование методов решения задач на отношение длин традиционным способом – с использованием теоремы Менелая и методом площадей, а также нетрадиционным – с использованием свойств центра масс.
- ✓ Выполнено самостоятельное решение задач на применение данного метода, что свидетельствует об усвоении полученных знаний и приобретении умения применять их на практике.
- ✓ Составлен банк задач из материалов ГИА, решаемых с помощью метода масс.
- ✓ Таким образом, выдвинутая нами гипотеза подтвердилась. Барицентрический метод позволяет не только сократить решение, сделать его более рациональным. Этот метод действительно облегчает решение, казалось бы, неразрешимых геометрических задач.

Практическая значимость исследования заключается в том, что полученные мной знания будут использоваться в дальнейшем изучении геометрии. Полученная информация будет полезна учащимся при решении геометрических задач. Составлена методичка по решению задач на отношение длин, которая может быть использована в процессе изучения математики на углубленном уровне.

Список использованных источников и литературы

1. Геометрия: 10, 11 классы: учебник для учащихся общеобразовательных организаций/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В. Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Вентана-Граф, 2017.
2. Н. Б. Балк, В.Г. Болтянский. „Геометрия масс”. Москва, 1987 г.
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч. II. – М.: Наука, 2006.

Интернет ресурсы:

1. http://www.fipi.ru/ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «Федеральный институт педагогических измерений».
2. https://ege.sdamgia.ru/ Образовательный портал для подготовки к экзаменам.

Приложение 2. Банк задач на отношение отрезков (ОГЭ задача №26, ЕГЭ задача С4).

1. Точки M и N — середины сторон соответственно BC и CD параллелограмма ABCD. Отрезки AM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение MO к OA.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

2. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причём AC = 2CN. Точка M находится на стороне BC, причём BM: MC = 1:3. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

Ответ: 1:9, считая от точки B.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причём AM : MB = 3:5, BN : NC = 1:4. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найдите отношения OA: ON и OM: OC.

Ответ: OA: ON=3:4, OM:OC=3:32.

4. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K так, что AM: MB = 2:3, AK : KC = 2:1, BN: NC = 1:2. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN?

Ответ: 6:7, считая от точки A.

5. На медиане AM треугольника ABC взята точка K, причём AK: KM = 1:3. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку Кпараллельно стороне AC, делит сторону BC.

Ответ: 1:7, считая от точки C.

6. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причём CN= AC; точка K — середина стороны AB. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

Ответ: 2:1, считая от точки B.

7. На стороне BC треугольника ABC и на продолжении стороны AB за вершину B расположены точки M и K соответственно, причём BM : MC = 4:5 и BK:AB = 1:5. Прямая KM пересекает сторону AC в точке N. Найдите отношение CN:AN.

Ответ: CN:AN=5:24.

8. На сторонах AB и AC треугольника ABC расположены точки K и L, причём AK : KB = 4:7 и AL:LC = 3:2. Прямая KL пересекает продолжение стороны BC в точке M. Найдите отношение CM:BC.

Ответ: CM:BC=8:13.

9. На сторонах AB и BC параллелограмма ABCD расположены точки N и M соответственно, причём AN : NB = 3:2, BM: MC = 2:5. Прямые AM и DN пересекаются в точке O. Найдите отношения OM:OA и ON:OD.

Ответ: OM:OA=20:21, ON:OD=6:35.

10. На сторонах AB и AC треугольника ABC расположены точки N и M соответственно, причём AN : NB = 3 : 2, AM : MC = 4:5. Прямые BM и CN пересекаются в точке O. Найдите отношения OM:OB и ON:OC.

Ответ: OM:OB=5:6 и ON:OC=8:25.

11. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) на стороне BC взята точка D так, что BD:DC = 1:4. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

Ответ: 1:2, считая от точки B.

12. На медиане AA_1 треугольника ABC взята точка M, причём AM: MA_1 = 1:3. В каком отношении прямая BM делит сторону AC?

Ответ: 1:6, считая от точки A.

13. Точки A_1 и C_1 расположены на сторонах BC и AB треугольника ABC. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M. В каком отношении прямая BM делит сторону AC, если AC_1: C_1B = 2:3 и BA_1: A_1C = 1:2?

Ответ: 1:3, считая от точки A.

14. Дан треугольник ABC. BM – медиана, а AN делит сторону BC в отношении 1:2 от вершины B и пересекается с BM в точке O. Найти отношение BO:OM.

Ответ: BO = OM.

15. Дан треугольник ABC. BM – медиана. Отрезок KP точкой K делит AB в отношении 2:1 от точки A, а точкой P делит отрезок BC в отношении 2:1 от вершины B. Отрезки KP и BM пересекаются в точке O. В каком отношении точка O делит отрезок KP?

Ответ: KO:OP=1:2.

16. В треугольнике ABC точка к делит сторону BC в отношении 1:4, считая от вершины B. В каком отношении отрезок AK делит медиану BM?

Ответ: 1:2, считая от точки B.