Научно-исследовательская работа

математика

Вычисление некоторых бесконечных сумм

или ADDO ET IMPERA (Добавляй и властвуй)

Выполнила:

Цирулик Полина Александровна

учащаяся 9 класса

МБОУ Первомайской СОШ, Первомайского района, Томской области

Руководитель:

Кулаева Лилия Минуровна

учитель математики

МБОУ Первомайской СОШ, Первомайского района, Томской области

ADDO ET IMPERA – ДОБАВЛЯЙ И ВЛАСТВУЙ.

Вычисление некоторых конечных сумм.

I. Введение

Широко известно крылатое латинское изречение: «divide et impera» - «разделяй и властвуй». Не менее продуктивна и противоположная максима: «addo et impera» - «добавляй и властвуй». Этим приемом мы пользуемся, например, производя дополнительные построения в геометрических чертежах, однако его с успехом можно применять также и в решениях некоторых алгебраических задач.

Начнём с занимательного математического фольклора.

Предположим, что у нас имеется пачка конвертов в количестве 100 штук. Сколько времени понадобиться, чтобы отсчитать из пачки 75 конвертов, если на подсчёт одного конверта уходит ровно 1 секунда? – 75 секунд! Ну что же, если отсчитывать с прилежностью компьютера, без затей, то так оно и выйдет. Но ведь можно справиться с заданием и гораздо быстрее! А что, если отсчитать и отложить в сторону дополнительную часть к нужному количеству, то есть 100 – 75=25 конвертов, забрав себе остаток? Тем самым мы аж в 3 раза сокращаем затраты времени на работу! Некоторые полагают, что это мелочь, но из подобных «мелочей» состоят мгновения нашей быстротекущей жизни. Этот пример показывает, как иногда полезно бывает рассматривать дополнительные объекты, исследовать ситуации и варианты, прямо не оговоренные в условии задачи. Вот уж действительно – дополняй и властвуй.

Цель исследования: изучение правил для вычисления конечных сумм и правила для решения задач на тему «Добавляй и властвуй».

Задачи исследования:

- познакомиться с литературой и другими источниками информации по теме;

- познакомиться с темой «addo et impera»;
- разобрать на практике задачи по теме «добавляй и властвуй» и некоторых конечных сумм;
- научиться использовать на практике вычисление некоторых конечных сумм;
- систематизировать полученный материал, оформить и презентовать исследовательскую работу.

Гипотеза исследования: выбранная мною тема исследования поможет мне применять правила конечных сумм для решения заданий повышенной сложности и задач олимпиадного уровня.

Проблема исследования: доказательство актуальности изучения данных способов решения примеров и задач, а также применения их в реальной жизни.

Объект исследования: задачи с некоторыми конечными суммами.

I. Основная часть

ADDO ET IMPERA – добавляй и властвуй.

Вычисление некоторых конечных сумм.

Не всегда в задачах или примерах для вычисления напрямую показаны все известные нам данные. Знания по этой теме можно, беспрекословно, использовать для решения задач на экзаменах. Надо быть внимательнее и знать, как представить условия задачи в другом виде. Может именно с того ракурса с которого вы посмотрите на возникшую проблему с решением, вы увидите именно то что для решения просто необходимо. Для некоторых заданий недостаточно просто представить их в другом виде, а нужно что-нибудь добавить или наоборот исключить для удобства решения. Но как проделывать такие операции с заданиями, если просто не знать, как это можно сделать. Тем более, чтобы не запутаться и решить все правильно. Вот эта тема и помогает научиться и отработать самим такие способы решения. И именно из-за этого тема является актуальной для изучения.

Задача: Найдите сумму **S**:

$$\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}+\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}}+\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{399}+\sqrt{400}}$$

Домножим числитель и знаменатель каждого слагаемого на сопряжённое, чтобы избавиться от иррациональности.

$$\frac{1(\sqrt{101}-\sqrt{100})}{(\sqrt{101}+\ \sqrt{100})(\sqrt{101}-\sqrt{100})}=\sqrt{101}-\sqrt{100}$$

$$\frac{1(\sqrt{102}-\sqrt{101})}{(\sqrt{102}+\ \sqrt{101})(\sqrt{102}-\sqrt{101})}=\sqrt{102}-\sqrt{101}$$

$$\frac{1(\sqrt{103}-\sqrt{102})}{(\sqrt{103}+\ \sqrt{102})(\sqrt{103}-\sqrt{102})}=\sqrt{103}-\sqrt{102}$$

$$\frac{1(\sqrt{400}-\sqrt{399})}{(\sqrt{400}+\ \sqrt{399})(\sqrt{400}-\sqrt{399})}=\sqrt{400}-\sqrt{399}$$

S $=\sqrt{101}-\sqrt{100}+\sqrt{102}-\sqrt{101}+\sqrt{103}-\sqrt{102}\ldots+\sqrt{400}-\sqrt{399}=$

$$-\sqrt{100}+\sqrt{400}=\ -10+20=10$$

Ответ: S=10.

Недавно на олимпиаде по математике мне встретилась задача из этой темы, и у меня возникли трудности с её решением. И в этой главе я постараюсь исследовать легкие и быстрые способы решения таких задач. Для начала рассмотрим примеры на вычисление сумм некоторых дробных выражений. Помимо того, что они интересны сами по себе, при их разборе я познакомлюсь с некоторыми приёмами, которые пригодятся в дальнейшем.

Задача: $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{999\cdot1000}$.

Понятно, что приводить дроби к общему знаменателю – трудоёмко и бесполезно. Заметим, что не случайно знаменатели всех членов ряда заданны в виде произведения двух соседних натуральных чисел. При каких операциях приходиться перемножать дроби? Чаще всего, при выполнении сложения или вычитания дробей. Так как числитель каждой дроби равен 1, то вряд ли мы сможем получить такую дробь путём сложения дробей, а вот вычитание дробей может привести к успеху. Действительно, обозначим искомую сумму **S**, тогда :

$$S = \frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1000-999}{999\cdot 1000}= \ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ \ldots+\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}=1-\frac{1}{1000}=\frac{999}{1000}.$$

Другими словами, мы вывели следующее соотношение

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{(n+1)}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

которым воспользовались.

В данном случае ***n*** – натуральное число, но полученное равенство $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ справедливо для дробных выражений, знаменатель которых отличен от нуля!

Глава 2. Приёмы, которые пригодятся на математической олимпиаде

1 . *В магазин пришло бесконечное множество математиков. Первый попросил килограмм сахара, второй - полкило, третий - четверть килограмма...*

-Так! - прервал их продавец, - Забирайте свои два килограмма и проваливайте.

Итак, первый вопрос, который рассмотрим – **почему сумма** $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$ **равна двум**?

Докажем этот факт двумя способами.

В **первом способе** вообще нет нужды оперировать с бесконечными последовательностями, поэтому его можно показать даже в 6 классах, сразу после изучения степеней.

Рассмотрим сумму

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

Прибавим к обеим частям дробь $\frac{1}{2^n}$.

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}$$

Сумма будет сворачиваться с правого края. Закончится это выражением:

$S+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=2$. Так что $S=2-\frac{1}{2^n}$

Понятно, что чем больше n, тем меньше S будет отличаться от двух.

Для решения **вторым способом** опять запишем искомую сумму

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$$

А также половину этой суммы:

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots$$

В вычтем из первого равенства второе

Все слагаемые, кроме первого, уничтожатся и мы получим:

$$\frac{S}{2}=1$$

Значит S=2.

Данный метод используется в общем виде для вывода формулы суммы геометрической прогрессии.

Итак, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=2$

2. Рассмотрим сумму

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$ до 1997 члена.

Воспользуемся закономерностью:

$\frac{1}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

И т.д.

Тогда сумма превращается в:

Что даёт нам единицу (Или $\frac{1997}{1998}$, если рассматривать только первые 1997 слагаемых.)

Как додуматься до этой закономерности? Оказывается, если в знаменателе дроби стоит произведение, то она представляется суммой дробей, у которых знаменатели раны множителям, входящим в это произведение.

В данном случае $\frac{1}{n(n+1))}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$

Найдём эти A и B, сведя сумму обратно к общему знаменателю:

$\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1))}$

Числители должны быть тождественно равны, поэтому

A+B=0 и A=1.

Значит B=-1. Отсюда и получаем соотношение:

$\frac{1}{n(n+1))}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Такой подход применим и тогда, когда в знаменателях стоят более сложные произведения.

Итак, **мы получили, что** $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots=1$

3. Найдём сумму

$\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots$.

Это также можно сделать двумя способами. В первом обозначим искомую сумму как S, найдём её половину и вычтем половину из целого:

$S=\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots$.

$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\cdots$.

$S-\frac{S}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$.

$\frac{S}{2}=2$

Значит S=4.

Второй способ

Запишем сумму в виде треугольника:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=2$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=1$

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=\frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{2^4}+\cdots=\frac{1}{2^3}$

Так что искомая сумма равна $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=4$

Итак, **третий результат**: $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots=4$

Мы нашли суммы следующих рядов:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=2$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots=1$

$\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots=4$.

4.. Рассмотрим теперь, что будет, если в третьем ряду числители будут образовывать не арифметическую прогрессию, а **последовательность Фибоначчи**.

Найдём сумму: $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{8}{2^5}+\frac{13}{2^6}+\cdots$.

Опять-таки применим метод деления и найдём, чему равна половина этой суммы.

Вычитаем из первого равенства второе:

$$\frac{S}{2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\frac{3}{2^5}+\frac{5}{2^6}+\cdots$$

Справа после первой единицы идёт исходная последовательность, разделённая на 4, поэтому:

$$\frac{S}{2}=1+\frac{S}{4}$$

Значит, S=4.

Итак,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{8}{2^5}+\frac{13}{2^6}+\cdots=4.$$

Увидев столько интересных сумм задумываешься: а **что получится**, если просто складывать дроби

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

Может, тут тоже сумма будет равна какому-нибудь целому числу или будет выражаться какой то формулой?

Оказывается, нет. Эта сумма будет расти до бесконечности.

Чтобы доказать это рассмотрим следующие соотношения:

1 = 1

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

и так далее

Сумма 2^n слагаемых больше, чем $1+\frac{n}{2}$, и следующие 2^n слагаемых увеличивают эту сумму ещё на величину, большую, чем $\frac{1}{2}$. Так что суммируя обратные величины натурального ряда (такой ряд ещё называется гармоническим), можно превысить любое наперёд заданное число.

Заключение

В результате проведенного мною исследования я выяснила, что тема «Вычисление некоторых бесконечных сумм» обладает рядом достоинств, позволяющих использовать её для развития соображения и улучшения логического мышления. Решение многих математических задач упрощается, если использовать изученный материал. Умение вычислять некоторые конечные суммы значительно облегчит решение задач, являющихся неотъемлемой частью различных олимпиад, что подтверждает гипотезу моего исследования. Рассмотренная мною данная тема это ещё один не малый плюс в мою копилку знаний.

Итак, подведём итоги: цель достигнута, поставленные задачи решены, проблема обоснована и приведены примеры. Поскольку тема имеет не очень большое, но очень значимое практическое применение, она мотивирует на дальнейшее углубленное и более широкое исследование тем: «addo et impera» и «Вычисление некоторых конечных сумм».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Научно-практический журнал «Математика для школьников», 2008 г., 64 стр.
2. Научно-практический журнал «Математика для школьников», 2010 г., 64 стр.
3. Научно-методический журнал «Математика в школе»,издательство «Школа-Пресс», 1999 г., 80 стр.

4. Е.Б. Дынкин, С.А Молчанов, А.Л. Розенталь, А.К. Толпыго «Математические задачи», издательство «Наука», 1971 г.
5. Ф.Ф. Нагибин, Е.С. Канин, Математическая шкатулка: Пособие для учащихся 4 – 8 кл. сред. шк. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1988. – 160 с.: ил.

Интернет ресурсы:

http://www.it-nv.ru/articles/primenenie_metoda_konechnih_elementov_v_stroitelstve