Научно-исследовательская работа

математика

Решение задач с помощью применения неравенств Бернулли, Коши, Коши-Буняковского.

Выполнила:

Филиппова Марина Дмитриевна

учащаяся 11 класса

МБОУ Первомайской СОШ, Первомайского района, Томской области

Руководитель:

Кулаева Лилия Минуровна

учитель математики

МБОУ Первомайской СОШ, Первомайского района, Томской области

I. Введение.

Выделены 4 основных метода решения уравнений: разложения на множители, замена переменной, переход от неравенства функции к равенству аргумента, функционально-графический. Помимо перечисленных методов существуют и специальные. Как правило, они используются в том случае, когда уравнение весьма затруднительно решается основными методами. Один из специальных методов решения - решение уравнений с помощью применения различных неравенств.

Неравенство Бернулли - теорема, которая формулируется в 3 этапа:

Если h>-1, то при любом натуральном p выполняется: $(1+h)^p \geq 1+ph$

- Если h>-1, и $\begin{cases} p > 1 \\ p < 0 \end{cases}$, то $(1+h)^p \geq 1+ph$
- Если h>-1 и 0<p<1, то $(1+h)^p \geq 1+ph$

Замечание: равенство достигается тогда и только тогда, когда p=1 или h=0

Неравенство Коши_- среднее геометрическое не превышает или равно среднему арифметическому. Равенство достигается при равенстве слагаемых. Выполняется при неотрицательных $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$. Его можно переписать следующим образом: $\frac{a_1, a_2, a_3 \dots a_n.}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 * a_2 * a_3 \dots a_n}$.

Неравенство Коши – Буняковского- пусть даны числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ такие, что $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$|b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n| \leq \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} -$$

Неравенство Коши – Буняковского, причем равенство

$$|b_1a_1+b_2a_2+\dots+b_na_n|=\sqrt{(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)}$$

Имеет место лишь тогда, когда существует число λ такое, что для каждого $k=1,2,...,n$ $a_k=\lambda b_k$. В школьной программе неравенство Коши-Буняковского тоже есть- это формула для нахождения косинуса угла между векторами на плоскости:

$$\cos(\overrightarrow{(a_1,a_2)};\overrightarrow{(b_1,b_2)})=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}*\sqrt{b_1^2+b_2^2}},$$

Цель работы: познакомиться с неравенствами Бернулли, Коши, Коши-Буняковского, а также показать, что при помощи рассматриваемого неравенства можно быстро и легко решать сложные неравенства и системы уравнений.

Задачи работы:

-познакомиться с неравенствами Бернулли, Коши, Коши-Буняковским;

-применить данные неравенства к решению задач;

-расширить свои знания в области математики.

Актуальность моей работы заключается в том, что данные неравенства значительно облегчают решения уравнений, которые трудно решить традиционным способом, помогают значительно сократить время решения сложных уравнений, олимпиадных заданий.

II.Основная часть

Применение неравенства Бернулли.

а) Для того, чтобы использовать неравенство Бернули для решения уравнений вида $\sqrt[n]{1+f(x)}$+…+$\sqrt[n]{1+g(x)}$=a нужно левую часть уравнения представить в виде суммы степеней вида $(1+f(x))^p$ и к каждому слагаемому применить неравенство Бернулли. Если после преобразований получим, что левая часть исходного уравнения совпадает с его правой частью, то в силу привидённого замечания, делаем вывод, что p=1 или $f(x)=0$

Пример 1: Решим уравнение: $\sqrt[4]{1-x}$+$\sqrt[4]{1+x}$ =4.

В левой части уравнения стоят корни чётной степени, а это значит, что $1-x\geq 0$ и , (тоесть $x\leq 1, x\geq -1$), значит имеет место неравенство $-1\leq x\leq 1$. Представим левую часть уравнения в виде суммы степени $\sqrt[4]{1-x}$ + $\sqrt[4]{1+x}$ = $(1-x)^{\frac{1}{4}}$ + $(1+x)^{\frac{1}{4}}$. Условия $x>-1$ и $0<\frac{1}{4}<1$ дают возможность применить неравенство Бернулли.

$(1-x)^{\frac{1}{4}}$ +$(1+x)^{\frac{1}{4}}\leq 1-\frac{1}{4}x+1+\frac{1}{4}x=2$

Получили, что $(1-x)^{\frac{1}{4}}+(1+x)^{\frac{1}{4}}\leq 2$, но $\sqrt[4]{1-x}$ + $\sqrt[4]{1+x}$ = 4. Получается, что 4$\leq$ 2, но это неверно, следовательно решений нет.

Ответ: решений нет.

б) Рассмотрим теперь применение неравенства Бернулли к уравнению вида $\sqrt[n]{1+f(x)}$ +…+$\sqrt[m]{1+g(x)}$ = $\sqrt[l]{1+g(x)}$ + $\sqrt[y]{1+\omega(x)}$. Обе части уравнения представим в виде сумм степеней

вида $(1+f(x))^p$. Затем к левой и правой частям уравнения применим неравенство Бернулли. Если после преобразований они совпадут, то определяем, при какие x выполняется равенство.

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{x+1}=(1-\frac{x}{24})^4+(1+\frac{x}{36})^6$.

Представим левую часть уравнения в виде суммы степеней $\sqrt{1-\frac{x}{3}} + \sqrt[6]{x+1}$ $= (1-\frac{x}{3})^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{6}}$. Приравняем её к правой части исходного уравнения : $(1-\frac{x}{3})^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{6}} = (1-\frac{x}{24})^4 + (1-\frac{x}{36})^6$.

Применим к обеим частям неравенство Бернулли (т.к $x \in [-1;3]$) и выполним преобразования: $(1-\frac{x}{3})^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{6}} \leq 1-\frac{1}{2}*\frac{x}{3}+\ 1+\ \frac{1}{6}x = 2$

$$(1-\frac{x}{24})^4 + \ (1-\frac{x}{36})^6 \ \geq 1-\frac{4x}{24}+1+\frac{6x}{36} = 1-\frac{2x}{12}+1+\frac{2x}{12} = 2$$

Следовательно, левая часть исходного уравнения равна его правой части, если каждая из них равна 2, значит, равенство возможно, если:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = 0 \\ x = 0 \\ \frac{x}{24} = 0 \\ \frac{x}{36} = 0 \end{cases}$$

Ответ: x=0.

Пример 3. Решите в целых числах уравнение: $x = \lg(9x+1)$.

Решение. Функция $f(x) = \lg\,(9x+1)$определена при $x > -\frac{1}{9}$.

Следовательно, целых решений отрицательных корней уравнение не имеет. Проверим, существует ли корень, равный нулю. В самом деле, при x=0 уравнение принимает вид ,т.е 0=0. Следовательно, x=0 – корень уравнения.

Остаётся установить, не имеет ли уравнение положительных корней.

Преобразуем: $x*1 = \lg(9x+1)$, $x*lg10 = \lg(9x+1)$,

$$x*lg10^x = \lg(9x+1), \qquad 10^x = 9x+1.$$

Получаем $(9+1)^x = 9x+1$. В неравенстве $(9+1)^x \geq 9x+1$равенство достигается или при x=1 или при 9x+1=0, т.е при $x = -\frac{1}{9}$

Второе значение хне входит в О.Д.З. неизвестной в исходном уравнении.
Ответ: x=0, x=1.

Пример 4. Найти значения выражений $1{,}005^{200}$ или $0{,}992^{10}$

$$1{,}005^{200} = (1+0{,}005)^{200} \geq 1 + 200 * 0{,}005 = 2$$

$$0{,}994^{10} = (1-0{,}006)^{10} \geq 1 - 10 * 0{,}006 = 0{,}94$$

Пример 5. Доказать, что для любых n ϵ N $(1{,}5)^n \geq 1 + 0{,}5n$

Решение: $1{,}5^n = (1+0{,}5)^n$. Положив x=0,5 и применив теорему Бернулли для выражения $(1+0{,}5)^n$, получим требуемое неравенство.

III.**Применение неравенства Коши**.

а) Рассмотрим частный случай неравенство коши для n=2, то есть $\frac{a_1+a_1}{2} \geq \sqrt{a_1 * a_2}$

Или $a_1 + a_2 = 2\sqrt{a_1 * a_2}$. Поскольку мы хотим воспользоваться неравенством для решения уравнений, нас интересует то, когда в неравенстве достигается равенство. Выясним это с помощью преобразований:

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 * a_2}$$

$$a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 * a_2} \geq 0$$

$$(\sqrt{a_1} + (-\sqrt{a_2}))^2 \geq 0$$

отсюда следует, что $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2=0$, если$a_1=a_2$. Для других значений n условия $a_1=a_2=\cdots=a_n$также обеспечивает обращения неравенство Коши в равенство.

Пример 1: Решим уравнение: $\sqrt[3]{25x(2x^2+9)}=4x+\frac{3}{x}$. Сразу учтём область определения неизвестного: $x\in R, x\neq 0$.Исходя из вида левой части, можно догадаться, что целесообразно применить неравенство Коши для n=3. Но неравенство Коши выполняется для неотрицательных членов (множителей). Левая и правая части уравнения представляют собой нечетные функции. Отсюда следует, что корни уравнения -числа противоположные, поэтому достаточно решить уравнение для x>0. Преобразуем уравнение, умножив обе его части на x, так как $x>0$.

$$x*\sqrt[3]{25x(2x^2+9)}=4x^2+3 => \sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}=4x^2+3$$

Рассмотрим левую часть и оценим её:

$\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}=\sqrt[3]{5x^2*x^2*5*(2x^2+9)}\leq\frac{5x^2+5x^2+(2x^2+9)}{3}=\frac{12x^2+9}{3}=$ $\frac{3(4x^2+3)}{3}==4x^2+3$, то есть $\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}\leq 4x^2+3$,а по условию $\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}=4x^2+3$. Таким образом, неравенство Коши обращается в равенство, а это возможно, если или $\begin{cases}5x^2=2x^2+9\\ x>0\end{cases}$ $=>$ $x=\sqrt{3}$, учитывая нечётность функций, входящих в уравнение, получаем $x=\mp\sqrt{3}$.

Ответ: $x=\mp\sqrt{3}$.

Рассмотрим теперь применение неравенства Коши для решения уравнений вида: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=g(x)$.

Сначала оценим каждый арифметический корень левой части уравнения с учётом показателя степени корня, для чего подкоренное выражение представляют в виде произведения множителей, количество которых определяется показателем степени корня. Например,

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{f(x) * 1} \leq \frac{f(x)+1}{2}, \quad \sqrt{g(x)} = \sqrt{g(x) * 1} \leq \frac{g(x)+1}{2}.$$

Затем складывают полученные оценки и записывают неравенство.

$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{f(x)+1}{2} + \frac{g(x)+1}{2}$. Таким образом получают систему: $\begin{cases} \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = g(x) \\ \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq \varphi(x) \end{cases}$, а из неё- неравенство $g(x) \leq \varphi(x)$. Теперь остаётся определить, при каких х достигается равенство в неравенстве $g(x) \leq \varphi(x)$.

Пример 2. Решим уравнение: $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$. Оценим каждый арифметический корень:$\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{(x^2 + x - 1) * 1} \leq \frac{(x^2+x-1)+1}{2} = \frac{x^2+x}{2}$

$$\sqrt{x - x^2 + 1} = \sqrt{(x - x^2 + 1) * 1} \leq \frac{(x-x^2+1)+1}{2} = \frac{x-x^2+2}{2}.$$

Найдём сумму полученных выражений:

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} \leq \frac{x^2+x}{2} + \frac{x-x^2+2}{2} = \frac{2x+2}{2} = x + 1.$$

С учётом исходного уравнения запишем систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2 \\ \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} \leq x + 1 \end{cases}$$

Отсюда $x^2 - x + 2 \leq x + 1$, или $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ $=> (x-1)^2 \leq 0$.

В полученном неравенстве при x=1 достигается равенство, следовательно, x=1 является единственным корнем.

Ответ: x=1.

Пример 3. Задача: Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна единице. Доказать, что (1+a)(1+b)(1+c) ≥ 8(1-a)(1-b)(1-c).

Решение: Поскольку a+b+c=1, то 1+a= (1-b)+(1- c). Используя неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, получаем $1 + a \geq 2\sqrt{(1-c)*(1-b)}$.

Аналогично $1 + b \geq 2\sqrt{(1-a)*(1-c)}$, $1 + c \geq 2\sqrt{(1-b)*(1-a)}$.

Перемножая все три неравенства, получаем искомое неравенство.

Пример 4. Сравните числа $\log_4 3$ и $\log_3 2$.

Сравним с единицей квадратный корень из отношения данных чисел:

$$\sqrt{\frac{\log_3 2}{\log_4 3}} = \sqrt{\log_3 2 * \log_3 4} \leq \frac{\log_3 2 + \log_3 4}{2} = \frac{\log_3(2*4)}{2}$$

$$= \frac{\log(3-1)(3+1)}{2} = \frac{\log_3(3^2-1)}{2} < 1$$

так как $\log_3(3^2-1) < \log_3 3^2 = 2$, из неравенства $\sqrt{\frac{\log_3 2}{\log_4 3}} < 1$ следует, что $\frac{\log_3 2}{\log_3 4} < 1$, т.е. $\log_3 2 < \log_3 4$.

Замечание: Такой прием особенно эффективен, когда оба сравниваемых числа заданы аналогичными выражениями.

Пример 5. Решите уравнение: $2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1$

Решение. Левая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных выражений, поэтому можно воспользоваться неравенством Коши: С учётом исходного уравнения имеем:

$$\begin{cases} 2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1 \\ 2x^4 + 2y^4 \geq 4x^2y^2 \end{cases} =>$$

От последнего неравенства легко перейти к неравенству $(2xy - 1)^2 \leq 0$

Отсюда Подставим $y = \frac{1}{2x}$в исходное уравнение, получим

При обозначении $x^4 = z, z > 0$, Предыдущее равенство примет вид

Вернёмся к исходной переменной : $x^4 = \frac{1}{4}$. Тогда $x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$и $y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

Пример 6. Задача. Требуется изготовить бак с крышкой объёмом $0{,}25$ м^3, имеющий квадратное основание. Сварка швов проводится по всему основанию и одному боковому ребру. Стоимость сварки составляет 10 руб. за 1 м., а стоимость жести-20 руб. за 1 .Установить размеры бака, при которых его стоимость будет наименьшей.

Решение. Обозначим буквой x сторону основания бака. Его высоту выразим из формулы $V = h * x^2$: $h = \frac{0{,}25}{x^2}$. Тогда площадь поверхности бака с крышкой находим по формуле: $S(x) = 2x^2 + 4x * \frac{0{,}25}{x^2}$, а длина свариваемых швов $l(x) = 4x + \frac{0{,}25}{x^2}$.

Стоимость изготовления $f(x) = 20 * S(x) + 10 * l(x)$.

Стоимость работ будет минимальной при наименьшем значении функции f(x):

$f(x) = 20\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right) + 10(4x + \frac{0,25}{x^2}).$

После перегруппировки получаем:

$f(x) = \left(40x^2 + \frac{0,25}{x^2}\right) + (40x + \frac{20}{x}).$

Найдём наименьшее значение этой функции на промежутке$(0; +\infty)$.

Возможны два способа решения: с помощью производной и с помощью неравенства Коши. Итак, применим неравенство Коши к выражениям, стоящим в скобках: $f(x) \geq 2 * \sqrt{40X^2 * \frac{2,5}{X^2}} + 2 * \sqrt{40x * \frac{20}{x}} = 20 + 40\sqrt{2}.$

Функция принимает наименьшее значение, когда достигается равенство, т.е при $40x^2 = \frac{2,5}{x^2}$и $40x = \frac{20}{x}$.

Наименьшее значение функция достигает при x=0,5 , тогда h=1м.

Ответ:x=0,5 м ; h=1м.

Пример 7. Доказать, что для всех неотрицательных a,b,c выполняется неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Доказательство. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$
\begin{array}{rl}
 & a^2 + b^2 \geq 2ab \\
+ & b^2 + c^2 \geq 2ac \\
+ & c^2 + b^2 \geq 2cb \\
\hline
 & 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac
\end{array}
$$

IV. Неравенство Коши-Буняковского

Задача 1. Найти максимальное значение функции $f(x) = \sqrt{x + 7} + \sqrt{11 - x}$

Решение: Рассмотрим векторы $u(\sqrt{x+7}; \sqrt{11-x}; v(1;1)$

Тогда $|u| = \sqrt{x+7+11-x} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}; |v| = \sqrt{2}$

$$u * v = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$$

Тогда неравенство u·v≤|u|·|v| примет вид: $\sqrt{x+7}\sqrt{11-x} \leq 3\sqrt{2} * \sqrt{2}$

То есть при любом допустимом значении *x* $f(x) \leq 6$. Значит, $f_{max}=6$.

Задача 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x^2 = \sqrt{7} \end{cases}$

Решение. Пусть *(x;y)*–решение системы, тогда для векторов $u(x^2; y^2; z^2)$ и $v(1;1;2)$, с одной стороны, имеют место равенства: $u \cdot v = \sqrt{7}$
|u|=1 , |v|= $\sqrt{7}$, а с другой стороны, согласно неравенству Коши – Буняковского, справедливо соотношение u·v≤|u|·|v| $\text{т. е.} \, 1 * \sqrt{6} \geq \sqrt{7}$ что является ложным утверждением, значит, исследуемая система уравнений несовместна.

Задача 3. Доказать, что для любых a,b,c ϵ R справедливо неравенство $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$

Доказательство. Запишем исследуемое неравенство в следующем виде: $(1*a+1*b+1*c)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)$

Это заведомо истинное неравенство, так как является частным случаем неравенства Коши – Буняковского.

Задача 4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции y = – 3cos x – 4sin x на области определения: $y = -3cosx - 4sinx$

$a(-3;-4)$, в$(cosx; sinx)$, $\quad a*b \leq |a*b| \leq |a|*$

$|b|$ при условии $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$

$$|-3cosx - 4sinx| \leq \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} * \sqrt{(cos)^2 + (sinx)^2}$$

$$|y| \leq 5, -5 \leq y \leq 5$$

Проверяем: $\frac{cosx}{-3} = \frac{sinx}{-4}$

$$-4cosx = -3sinx$$

$$-4cosx + 3sinx = 0$$

$$-4 + 3tgx = 0$$

$$3tgx = 4$$

$$tgx = \frac{4}{3}$$

$$x = arctg\frac{4}{3} + \pi n, n \in Z$$

Так как уравнение разрешимо, то равенство реализовано.

Наибольшее значение функции равно 5 и наименьшее значение функции равно –5.

Задача 5. Найдите наибольшее значение функции $\quad \mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{x} + 7} + \sqrt{11 - \mathrm{x}}$

$a(\sqrt{x+7}; \sqrt{11-x})$, $\; b(1;1)$

$$|a*b| \leq |a|*|b|$$

$$|a| = \sqrt{x+7+11-x} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|b| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|a*b| \leq 3\sqrt{2}*\sqrt{2}$$

$$|f(x)| \leq 6$$

Проверим реализацию равенства:

$$\frac{\sqrt{x+7}}{1} = \frac{\sqrt{11-x}}{1}$$
$$\sqrt{x+7} = \sqrt{11-x}$$

2x = 4;   x = 2 => уравнение имеет решение, значит наибольшее значение функции равно 6 при x = 2.

Задача 6. Доказать неравенство: $\left(1+\frac{1}{sina}\right)\left(1+\frac{1}{cosa}\right) > 5$, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Решение: Представим выражение в скобках в следующем виде и воспользуемся неравенством К-Б, в итоге получим:

$$(1^2 + (\frac{1}{\sqrt{sina}})^2)(1^2 + (\frac{1}{\sqrt{cosa}})^2) \geq (1 + \frac{1}{\sqrt{sinacosa}})^2 = (1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{sin2a}})^2 \geq (1 + \sqrt{2})^2 > 5$$

Задача 7. Дан куб ABCDA1B1C1D1, ребро куба равно 2. Найдите угол между прямыми AD1 и BM где M- середина ребра DD1.

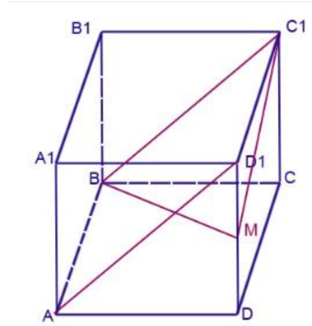
Решение: Перенесем AD1 на параллельную прямую BC1. Искомый угол равен углу C1BM. Введём куб в прямоугольную систему координат, начало координат в точке B. Найдем координаты концов отрезков:

B(0;0;0) ; C1 (2;0;2) ; M(2;2;1) $\overrightarrow{(BC1)}$ {2;0;2} $\overrightarrow{(BM)}$ {2;2;1}

$$\cos(\overrightarrow{(a_1, a_2)}; \overrightarrow{(b_1, b_2)}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 * \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}}$$

$$\cos < C1BM = \frac{2*2+0*2+2*1}{\sqrt{2^2+0^2+2^2} * \sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{4+2}{\sqrt{8} * \sqrt{9}} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Следовательно, <C1BM=45°   Ответ: 45°



V. Заключение.

Таким образом, представленные выше неравенства значительно облегчают решение уравнений, которые трудно решить традиционным способом. Позволяют получить дополнительные знания в области математики. Значительно сокращают время решения сложных уравнений. Также решение задач именно с помощью неравенств помогает мне готовиться к олимпиадам.

VI. Список используемой литературы:

1. Вавилов Н.И.Задачи по математике. Уравнения и неравенства.«Наука»1987 г

2. Большая советская энциклопедия по математике. Том № 1 и № 3.

3. Журнал «Математика в школе» № 1 2002 г.

4. Л.И. Терехина, И.И. Фикс. Высшая математика. Часть 2. Томск 2002 г.

5. http://enc-dic.com/enc_math/Koshi-zadacha-1582.html

6. http://www.math10.com/ru/algebra/neravenstva-sarevnovania.html