

Научно-исследовательская работа

математика

Теория вероятности и комбинаторика в биологии

Выполнил:

учащийся 11 класса

Коппалов Кирилл Юрьевич

МБОУ Первомайской СОШ, Первомайского района, Томской

области

Руководитель:

Кулаева Лилия Минуровна

учитель математики

МБОУ Первомайской СОШ, Первомайского района, Томской

области

Введение

В биологию - науку о живой природе, математика входит различными путями: использование современной вычислительной техники для быстрой обработки результатов биологического эксперимента, и создание математических моделей, описывающих различные живые системы и происходящие в них процессы. Не менее важна и «обратная связь», возникающая между математикой и биологией: биология не только даёт возможность для применения математических методов, но и становится источником новых математических задач. Биология широко использует математический аппарат при проведении тех или иных исследований. При изучении генетических законов, решении задач по генетике, биохимии и популяционной генетике математический аппарат необходим как при освоении теоретического материала, так и при решении конкретных задач. Комбинаторные и вероятностные методы используются для решения современных проблем генетики.

Цель работы: рассмотреть применение теории вероятности и элементов комбинаторики в биологии.

Задачи:

1. Собрать и изучить необходимую информацию об основных понятиях теории вероятности;
2. Изучить основные законы биологии для решений задач по генетике и рассмотреть их решение с «точки» вероятности;
3. Собрать и изучить информацию об основных понятиях комбинаторики;
4. Связать применение формул комбинаторики с генетикой.

II. Основная часть

Математическая вероятность

1. Случайные события относительная частота случайного события.

События в материальном мире можно распределить на три категории:

1. Достоверные (события, которые обязательно произойдут).
2. Невозможные (события, которые не при каких условиях не произойдут).
3. Случайные (события, результат которых предсказать не возможно).

Потребность практики привела математиков к изучению случайных событий. Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называют теорией вероятностей. Эта теория имеет дело не с отдельными событиями, а с результатом проведения достаточно большого числа испытаний. Обычно

многократные случайные эксперименты проводят, чтобы определить насколько часто проявляется интересующий нас результат. Для этого сначала подсчитывают, сколько раз в проведенных экспериментах наблюдалось событие, которое нас интересует, а затем вычисляют относительную частоту проявления этого события. Таким образом, относительной частотой случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов. Так, если взять большой город или же целую страну, то оказывается, что соотношение между числом родившихся мальчиков и общим числом родившихся детей от года к году сохраняют почти постоянное значение.

Частота рождения мальчиков по годам меняется незначительно и наблюдается вблизи числа 0,5185. Мальчики в среднем рождаются несколько часто, чем девочки, и на каждую тысячу рождений приходится примерно 482 девочки 518 мальчиков. Такие исследования были проведены для всех стран и в разные годы. Примерная близость частот рождения мальчиков оказывается неизменной. Такое практическое постоянство частот называется **устойчивостью частот**.

2. Классическое определение вероятности событий.

Одно из важнейших понятий в современной науке - вероятность. Дать математически корректное определение можно только на основе глубокого знания современной математики, поэтому мы вынуждены ограничиваться первичными представлениями в сложившихся работах Л. Бернулли, Б. Паскаль. По этой причине оно получило наименование классического определения вероятности событий. Это понятие опирается на понятие равновероятности событий или симметрий.

Пример.

В опыте с броском монеты события, что выпал «герб» и выпала «цифра» очевидно равновероятно. Это утверждение основано на том, что монета симметрична и однородна.

В наши дни приходится часто встречаться с таким положением, поэтому при решении задач по математике и биологии обращаются к классическому определению.

Итак, перейдем к классическому определению вероятности случайного события: - вероятностью случайного события $P(A)$ называется отношение числа равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию к числу всех равновозможных элементарных событий при данном испытании.

$$P(A) = n / m$$

Вероятность случайного события приближенно равна частоте

этого события, полученной при проведении большого числа случайных экспериментов.

3. Схема Бернулли

Рассмотрим очень простую, но очень важную для теории вероятности схему независимых испытаний, получившей название «Схема Бернулли»; В честь выдающегося швейцарского математика Якова Бернулли.

Основной вопрос, который здесь возникает, состоит в следующем: произведены n -количество независимых испытаний.

Спрашивается, чему равна вероятность того, что в каких-то m ($0 \leq m \leq n$) из них наступит событие A ? Ответ на этот вопрос даёт формула Бернулли.

Найдем вероятность того, что в испытаниях с определенными номерами (например $1, 2, 3, \dots, m$) событие A произойдет, а в остальных A не наступит (то есть произойдет противоположное ему \bar{A}); но такой выбор номеров испытаний может быть произведен различными способами. Число таких способов, очевидно, равно числу **сочетаний из n по m** .

В силу того, что событие A наступит при определенных m испытаниях, а при остальных $n - m$ оно не наступит, равна $p^m (1 - p)^{n-m}$, где $1 - p = \bar{A}$

Для каждого такого выбора эта вероятность одна и та же, т. к. испытания независимы друг от друга. Таким образом, искомая вероятность равна:

$$C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}.$$

Найденную вероятность обозначают символом $P_n(m)$, вероятность не наступления – буквой q ($q = 1 - p$).

Таким образом, формула Бернулли выглядит так:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Элементы теории вероятности в биологии

С незапамятных времен людей волновал вопрос о причинах сходства потомков и родителей. Первый шаг в познании закономерностей наследственности сделал исследователь Грегор Мендель. Основным методом в опытах Менделя заключается в скрещивании (гибридизации) гороха.

Г. Мендель проводил опыты с горохом, когда родительские организмы отличались друг от друга по одному изучаемому признаку, поэтому скрещивание называют моногибридным.

Скрестив два сорта, отличающиеся цветом семян (желтым и зеленым), гибридные семена оказались только желтыми.

Следовательно, у гибридов первого поколения появился признак

только одного родителя. Такой признак ученый назвал доминантным, другой признак он назвал рецессивным. Таким образом Г. Мендель обнаружил единообразие первого поколения, и доминирования одного признака над другим. Это явление получило название – **Первый закон Менделя.**

Далее при самоопылении растения произвели семена второго поколения, имеющие как доминантные, так и рецессивные признаки, причем отношение числа первых к числу вторых равно 3:1, Г. Мендель сформулировал **Второй закон.**

Установив закономерности наследования одного признака, Мендель начал изучать наследование двух признаков (дигибридизация); примером может служить цвет и форма семян.

Обычно обозначают: А – доминантный цвет (желтый), а – рецессивный цвет (зеленый), В – доминантная форма (гладкая), в – рецессивная форма (морщинистая).

Каждый гибрид первого поколения имеет четыре типа мужских и женских гамет: АВ, Аb, аВ, ab. Образование зиготы происходит при соединении двух гамет из указанных типов 16 вариантов.

Составим решетку Пиннета:

$$\begin{array}{ccc} \text{ААВВ} & * & \text{ааbb} = \text{АaВb} \\ \text{ж. г.} & & \text{м. з} \quad \text{ж. г} \end{array}$$

Муж.гам Жен. гам	АВ	Аb	аВ	ab
АВ	ААВВ ж. гл	ААВb ж. гл	АaВ В ж. гл	АaВb ж. гл
Аb	ААВb ж. гл	АAbb ж. м	АaВb ж. гл	Аabb ж. м
аВ	АaВВ ж. гл	АaВb ж. гл	aaВВ з. гл	aaВb з. гл
ab	АaВb ж. гл	Аabb ж. м	aaВb з. гл	aabb з. м

Из таблицы видно, что число различных фенотипов (по двум признакам) во втором поколении гибридов относится к друг другу как 9:3:3:1

А если рассмотреть по каждому признакам в отдельности, то окажется, что оно равно 3:1. все это составляет **сущность третьего закона Менделя.** Точное выполнение данных соотношений возможно лишь при большом количестве изучаемых гибридных особей.

Применение теории вероятности в решениях задач по генетике.

Задача 1.

Каковы генотипы гибридов первого и второго поколений, полученных путем скрещивания родительских сортов гороха (если желтая окраска **A** доминирует над зеленой окраской **a**); Гладкая форма семян **B** доминирует над морщинистой **b**). Какова вероятность того, что фенотип какого –то гибрида будет: зеленого цвета, морщинистой формы? Какие генетические закономерности проявляются в такой гибридизации?

Дано:

A – желтый цвет

a – зеленый цвет

Зеленый морщинистый

B – гладкая форма

b – морщинистая форма

Решение:

P: ♀ AABV * ♂ aabb

Фенотип: Желтый, гладкий

Гаметы: AV ab

F₁: Aa Bb

Фенотип: Желтый, гладкий.

P: ♀ AaBb * ♂ Aa Bb

F_{1,2} - ?

F₂:

♂ ♀	AV	Ab	aV	ab
A B	AAB B ж. гл	AAB b ж. гл	AaB B ж. гл	AaB b ж. гл
A b	AAB b ж. гл	AAb b ж. м	AaB b ж. гл	Aab b ж. м
aV	AaB B ж. гл	AaB b ж. гл	aaB B з. гл	aaB b з. гл
ab	AaBb ж. гл	Aabb ж. м	aaBb з. гл	aabb з. м

По фенопиту: 9:3:3:1

Ответ:

P(вероятность – зеленый, морщинистый) = 1/16

Данная задача служит примером третьего закона Менделя

Задача 2

От родителей, имевших нормальное цветовое зрение по фенотипу родились дети с нормальным зрением и один мальчик – дальтоник. Чем это объяснить. Каковы генотипы родителей и детей? Какова вероятность рождения мальчика - дальтоника?

Дано:	Решение:
XX – женский генотип	P: ♀ $x^D x^d$ * ♂ $x^D y$
XУ – мужской генотип	здоровый(носитель) здоровый
x^D – здоровый	гаметы: x^D x^d * $x^D y$
x^d – дальтоник	F ₁ : $x^D x^D$, $x^d y$, $x^D x^d$, $x^D y$.
	Фенотип: здоровый
(25%),	
P(d) - ?	дальтоник(25%),
здоровый(носитель 25%),	
G - ?	здоровый (25%)

Ответ: Рождение в семье, где родители имеют нормальное цветное зрение, рождение мальчика дальтоника объясняется тем, что мать является носителем гена дальтонизма. В генотипе матери он подавляется доминантным (x^D), поэтому дальтоники могут только мальчики.

Данная задача показывает, что вероятность рождения мальчика – дальтоника равна $\frac{1}{4}$.

Элементы комбинаторики

На практике часто приходится выбрать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающие теми или иными свойствами, располагать элементы в определенном порядке.

Поскольку в таких задачах речь идет о комбинациях объектов, их называют комбинаторными задачами. Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называется комбинаторика.

Зачатками комбинаторных задач были азартные игры. Для подсчета решений комбинаторных задач используют различные формулы. Все формулы основаны на двух простых правилах, которые называются правилами произведения и суммы.

1. Первым основным правилом комбинаторики является **правило произведения**. Оно выражается следующей теоремой: **Если элемент X можно выбрать k – способами, а элемент Y – m способами, то пару (X; Y) можно выбрать km – способами.**
2. Вторым важным правилом комбинаторики является **правило суммы**: **Если элемент X можно выбрать k способами, а элемент Y – n способами, причем ни один способ выбора элемента Y, то выбор (X) или (Y) можно сделать k + n способами.**

Любая комбинаторная задача решается с использованием известных комбинаторных . В этих понятиях встречается такое понятие, как факториал. **Факториалом числа n называется произведение первых подряд идущих n натуральных чисел, и обозначается n!**

Пример: $6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$

Одна из комбинаторных формул: **перестановка с повторениями**. Перестановками называют размещения из n предметов по n, иначе говоря, произведение всех целых натуральных чисел от 1 до n или $n!$ – это условие выполняется когда все элементы n длины кортежа различны.

Рассмотрим следующий пример:

Слово «задача» имеет длину кортежа, равную шесть букв; вообще говоря, шесть букв можно переставить друг с другом $6!$ способами. Но дело в том, что в слове «задача» буква «а» повторяется три раза, и при перестановки между ними слова не изменится $3!$ раз. Здесь мы имеем дело с перестановками с повторениями. Если эти способы можно комбинировать друг с другом, значит число перестановок с повторениями в $3!$ раз меньше общего числа перестановок, т.е. $6!/3! = 120$ способов. Следовательно, формула перестановок с повторениями будет выглядеть так:

$P(n_1, n_2, \dots, n_m) = (n_1 + n_2 + \dots + n_m)! / n_1! * n_2! * \dots * n_m!$.

Элементы комбинаторики в генетике

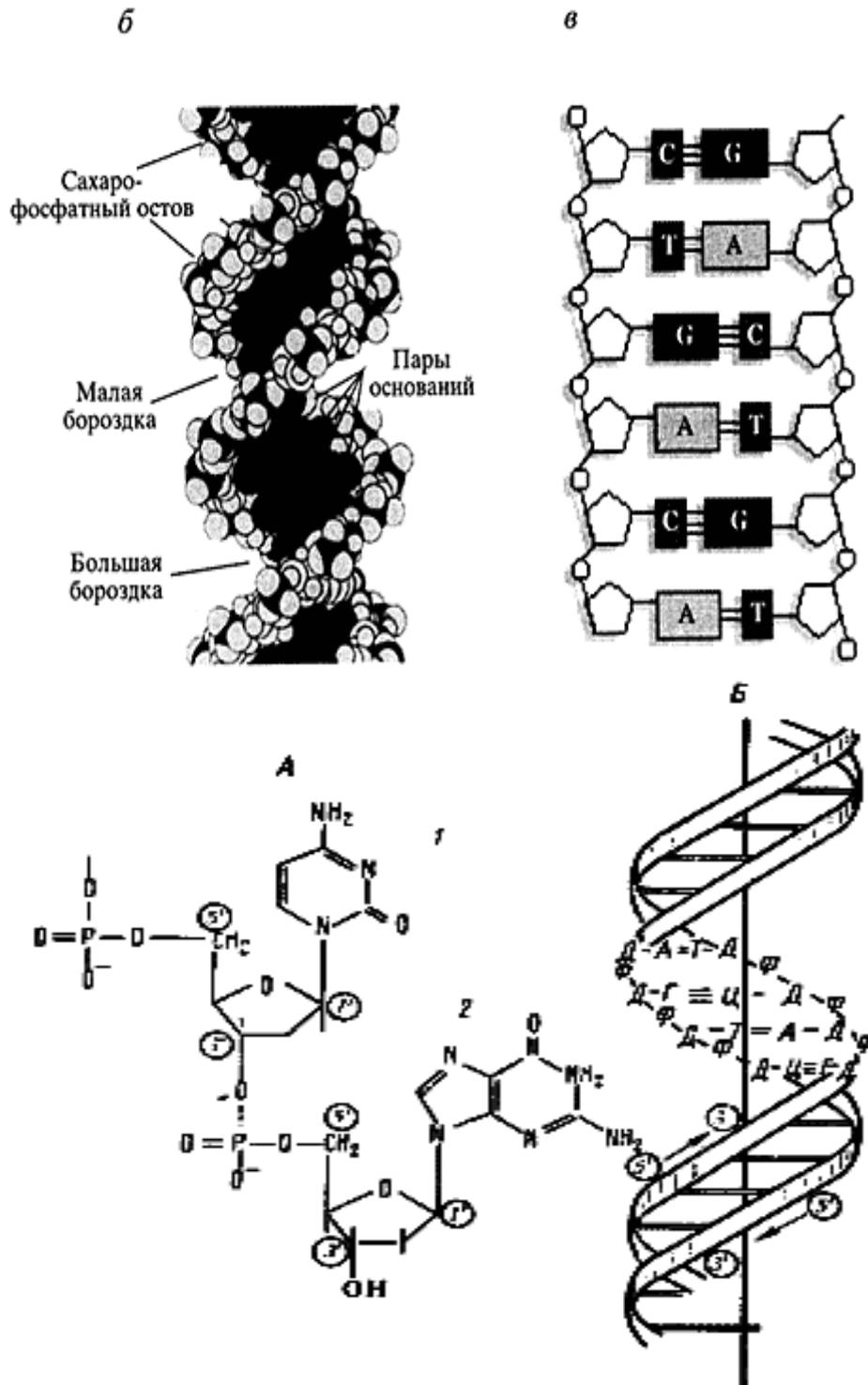
ДНК- совокупность комбинаций

В клетках любого организма имеются два вида нуклеиновых кислот: ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота) и РНК (рибонуклеиновая кислота). Эти две кислоты различаются по строению, составу, функциям. ДНК и РНК являются исключительно важными элементами клетки, обеспечивающие хранение и передачу наследственной информации. Нуклеиновые кислоты – высоко молекулярные биополимеры, состоящие из мономеров, называемые нуклеотидами. Нуклеотид состоит из трех компонентов.

Нуклеотид ДНК содержит: 1. пятиуглеродный сахар – дезоксирибоза; 2. одно из четырех азотистых оснований: Аденин «А». Тимин «Т». Гуанин «Г», Цитозин «Ц»; 3. остаток фосфорной кислоты. Молекула ДНК представляет собой двойную спираль, соединенную водородными связями азотистых оснований.

Особенностью ДНК является то, что против Аденина, в одной цепи, лежит азотистое основание Тимин, в другой цепи; против Гуанина лежит всегда Цитозин . Эти пары оснований называют – комплементарными. Между Гуанином и Цитозином – тройная водородная связь; между Аденином и Тимином – двойная водородная связь, и расположены под прямым углом к оси

молекулы ДНК в середине. Название нуклеотидов соответствуют названиям азотистых оснований соответственно.



На

основании такой модели Дж. Уотсон и Ф. Крик предположили, что наследственная информация закодирована в виде последовательности нуклеотидов.

Для рассмотрения применения комбинаторики в биологии я буду использовать данную теорию генетики, поставив такой вопрос: Сколько разной генетической информации может содержать

некоторый участок молекулы ДНК, зная количество нуклеотидов, т. е. нужно найти различные комбинации, сохранив данный состав. Для ответа на заданный вопрос рассмотрим на примере участок, состоящий из пяти нуклеотидов:

А
Г
Т
Ц
А

Ход работы.

По условию, нам нужно составить различные цепочки, сохранив состав; т. е. все размещения, содержащие все элементы множества.

Мы будем использовать комбинаторную формулу – перестановку без повторений: $P_n = n!$ Однако участок состоит из двух нуклеотидов «А». При перестановке друг с другом участок ДНК не изменится, следовательно, не изменится генетическая информация $2!$ Раз.

Таким образом мы будем использовать формулу – перестановки с повторениями:

$$P(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m) = (n_1 + n_2 + \dots + n_m)! / n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!$$

Теперь мы можем найти количество различных цепочек:

$$P(2,1,1,1) = (2 + 1 + 1 + 1)! / 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! = 5! / 2! = 20$$

Данный участок ДНК, состоящий из пяти нуклеотидов может при перестановке иметь двадцать различной информации.

Однако в данный момент времени, если нам будет известна длина участка ДНК, мы не сможем найти точно все возможные комбинации, используя комбинаторную формулу, т. к. в природе происходят такие явления, так называемые – мутации.

Мутации

Мутации – это случайно возникшие стойкие изменения генотипа, затрагивающие целые хромосомы, их части или отдельные гены.

В природе различают несколько типов мутаций:

1. Хромосомные мутации – это перестройки хромосом. Различают пять основных хромосомных мутаций: а) делекция – потеря участка хромосомы; б) дубликация – удвоение участка хромосомы; в) Инверсия – поворот части хромосомы на 180 градусов; г) Транслокация – обмен участками негомологичных хромосом; д) Слияние двух негомологичных хромосом в одну.

Пусть «АБВГДЕ» - нормальная структура хромосомы, тогда «АБВВГДЕ» - дубликация; «АБВГД» - делекция; «АБГВДЕ» - инверсия; «АБВГМН» - транслокация; «АБВГДЕ» - слияние

NMJH

С «точки» вероятности и комбинаторики мутации представлены случайными перекомбинациями в гене.

2. генные мутации – связанные с изменением последовательности нуклеотидов в молекуле ДНК. Генные мутации следует рассматривать как результат случайных нарушений при удвоении ДНК.

С точки зрения эволюции мутации полезны, более того они необходимы. Доказательство: многообразие существующих на земле видов организмов, как следствие длительной эволюции, организм появляется на свет со сложным генотипом, достаточно хорошо приспособленным к условиям окружающей среды

Теория вероятностей и медицина

Встречаются задачи, в которых медицинские проблемы решаются с помощью формулы полной вероятности.

Задача:

Каждый человек имеет одну из четырёх групп крови. Переливание крови осуществляется при условии, что номер группы донора не превосходит номера группы реципиента. Среди всего населения 1-я, 2-я, 3-я и 4-я группы составляют соответственно 30%, 40%, 20% и 10%. Найти вероятность того, что реципиенту, имеющему 2 группу, можно перелить кровь от случайно взятого донора.

Решение:

Событие А - реципиенту, имеющему 2 группу, можно перелить кровь от случайно взятого донора. Рассмотрим 4 гипотезы (так как среди населения 4 группы крови):

Н 1 – донор имеет первую группу, таких людей 30%, следовательно, вероятность $P(H1) = 0,3$;

Н 2 – донор имеет вторую группу, таких людей 40%, следовательно, вероятность $P(H2) = 0,4$;

Н 3 – донор имеет третью группу, таких людей 20%, следовательно, вероятность $P(H3) = 0,2$;

Н 4 – донор имеет четвёртую группу, таких 10%, следовательно, вероятность $P(H4) = 0,1$.

Так как номер группы донора не должен превосходить номера группы реципиента, то переливание возможно только для 1 и 2 группы.

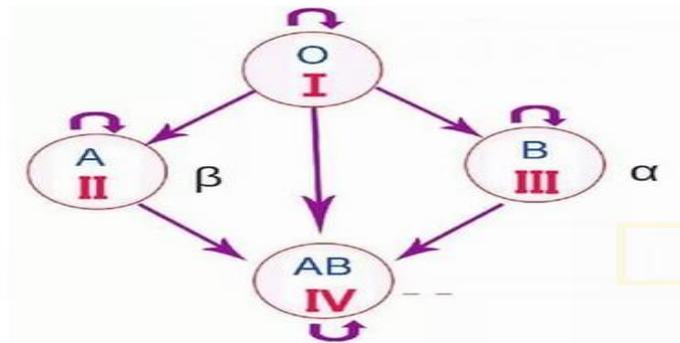
То есть условные вероятности $P(A/H1)=1$, $P(A/H2)=1$, $P(A/H3)=0$, $P(A/H4)=0$.

По формуле полной вероятности для 4-х гипотез

$$P(A) = P(H1) * P(A/H1) + P(H2) * P(A/H2) + P(H3) * P(A/H3) + P(H4) * P(A/H4);$$

$$\text{получаем } P(A) = 0,4 * 1 + 0,3 * 1 + 0,2 * 0 + 0,1 * 0 = 0,7$$

Ответ: вероятность составит 70%.



Своеобразие возникающих задач – одна из основных причин интереса, проявляемого биологами к математике.

Заключение

В работе мною были рассмотрены некоторые вопросы по биологии, связанные с генетикой, которые рассмотрены с «точки» вероятности и комбинаторики в решениях задач по генетике и в теории о строении ДНК. Именно в этих вопросах ярко проявляется роль случайностей и комбинаций. Но все же роль теории вероятности и комбинаторики в биологии намного шире.

Список литературы

1. А.Г Мерзляк, Д.А.Номировский, В.Б. Полонский, М.С. Якир «Алгебра и начала математического анализа» 10, 11 класс, Вентана-Граф», 2020
2. И. Н. Антипов, Н. Я. Виленкин, А. В. Мордкович. «Избранные вопросы математики. Факультативный курс», Москва «Просвещение», 1976г.
3. Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев–Мусатов, «Алгебра и математический анализ», Москва «Просвещение», 1999г.
4. .П. В. Семенов «События. Вероятности. Статическая обработка данных», Москва, «Мнемозина», 2005 г.
5. А. О. Рувинский, А. В. Высоцкая, С. М. Благолев, Б. М. Медников, «Общая биология», Москва, «Просвещение», 1993г.