Исследовательская работа

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ЧЕТНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ.

Выполнил:
Селюнин Роман Даниилович
учащийся _8А_ класса
МБОУ Первомайская СОШ, Россия, с. Первомайское, обл. Томская

Руководитель:
Якименко Вера Анатольевна
учитель математики,
МБОУ Первомайская СОШ, Россия, с. Первомайское, обл. Томская

Предисловие

Понятие чётности очень важно для развития математической культуры школьника. Идейно это понятие простое и обычное и не вызывает трудностей. Задачи же, связанные с чётностью, могут варьироваться от очень простых до очень сложных. Эти задачи позволяют на простом материале ввести школьника в разнообразный круг математических идей. Прежде всего, тема Чётность - является как бы введением в более общую тему ─Делимость и остатки, которая близко примыкает к школьной программе. Но, несмотря на простоту ряда задач, их решение требует каких-то логических умозаключений, что тоже позволяет развить математическую культуру. С другой стороны, в предлагаемых задачах в зачаточной или более серьёзной форме встречаются более далёкие от школьной программы, но часто встречающиеся на олимпиадах идеи, такие как инвариант, периодичность, раскраски, математическая индукция и др. Чётность часто используется как инструмент при решении задач на процессы, игры, графы и т. д.

В приложении собраны задачи, которые можно использовать для домашних заданий, самостоятельной работы учащихся, школьных олимпиад и т. .

Для понимания материала и решения большинства задач не требуется знаний, выходящих за рамки начальной школы: понятие натурального и простого числа, признак делимости на 2, начала алгебры.

Конечно, я не сам придумывала задачи. Многие из них известны уже давно, часть появилась в последние годы. Авторы некоторых задач нам известны, но поскольку нет никакой возможности установить авторство всех задач, нам пришлось вообще отказаться от указания авторства. Надеемся, что авторы задач нас простят.

Проблема: Решение логических и олимпиадных задач.

Цель: доказать, что некоторые задачи легко решаются, если применить четность.

Задачи:

1. Узнать, что такое четность и нечетность
2. Научиться распознавать признаки четности и нечетности чисел
3. Узнать о результатах действий
4. Применение четности в решениях задач

Объект исследования: четность и нечетность

Предмет исследования: решение логических задач

Методы исследования:

- Работа с учебниками математики
- Наблюдения, сравнение и анализ
- Практическое применение
- **Гипотеза**: Если я изучу дополнительные сведения по теме «Четность», то это поможет мне в решении олимпиадных задач.

История о четных и нечетных чисел.

Все числа представляют собой чет и нечет, точно так же и все вещи и процессы соединяют в себе противоположности – начало и конец, предел и бесконечность. Каждое явление или вещь Пифагор рассматривал как примирение противоположностей – гармонию.

Важнейшей частью пифагорейской арифметики было учение о четных и нечетных числах. Не случайно Платон в своих диалогах неоднократно определял арифметику как «учение о четном и нечетном». Четное и нечетное были для пифагорейцев не только основными понятиями теории чисел, но и важнейшими философскими категориями. Пара четное-нечетное наряду с такими парами, как предел-беспредельное, мужское-женское, доброе-злое, включалась в 10 пар противоположностей, которые пифагорейцы считали началами всего сущего.

Исследователи Евклида давно обратили внимание на конец IX книги его начал «Начал» (предложения 21 - 34), который явно выпадал из общего контекста книги: «Эта часть есть не что иное, как целиком воспроизведенный фрагмент древнего пифагорейского учения о четном и нечетном».

Понятие четности чисел известно с глубокой древности и ему часто придавалось мистическое значение. В китайской космологии и натурософии четные числа соответствуют понятию «инь», а нечетные- «ян». Еще с древних времен остались обычаи дарить четное или нечетное количество цветов, хотя в разных странах по - разному.

Что такое четность и нечетность?

Четные числа - это числа, которые делятся на два без остатка. Например, число 178-делится на два, значит это число четное.

Нечетные числа - это числа, которые не могут делиться на два без остатка

Николай с сыном и Пётр с сыном пошли на рыбалку. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Пётр столько же, сколько его сын. Все вместе поймали 27 рыб. Сколько рыб поймал Николай?

Сначала кажется, что в задаче не хватает данных: два неизвестных и одно уравнение. Затем кто-то должен сообразить, что условия задачи противоречивы. Действительно, отцы поймали столько же рыб, сколько и сыновья.

Но тогда общее число рыб должно быть чётным, а по условию оно нечётно.

(Вариант рассуждения: Николай с сыном вместе поймали чётное число рыб.

о же верно и для Петра с сыном. Значит, и сумма этих чисел чётна. Если

школьники сами не догадаются до одного из этих соображений, следует им

немного подсказать).

Но никакого противоречия нет! К противоречию привело неявное предположение о том, что на рыбалке было четыре человека. Но их могло быть и три (Николай | сын или отец Петра). Из условия теперь следует, что все поймали рыб поровну, то есть по 9 штук.

Тема 1 Чётность суммы и произведения

Стоит начать с разбора и обсуждения вводной задачи. Она позволяет начать разговор об определении и свойствах чётности, а также вспомнить признак чётности.

Чтобы каждый раз не повторяться, договоримся, что все числа, о которых пойдет речь на этом занятии, целые.

Прежде всего, мы использовали тот факт, что число вида n+n чётно (поймали столько же рыб, сколько сыновья, поэтому вместе они поймали чётное число рыб). Вот ещё одна задача,

иллюстрирующая ту же идею.

Задача 1. Кузнечик рыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку. Все прыжки имеют одинаковую длину. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

Решение. Сколько раз он рыгнул вправо, столько же рыгнул и влево (так как вернулся в исходную точку).

Далее следует довольно много формальных рассуждений. Они предназначены для въедливых школьников, которые требуют всё доказывать. Если есть уверенность в том, что школьники хорошо понимают содержательный

смысл приводимых утверждений, то большую часть формальных рассуждений можно (на усмотрение учителя) о пустить.

Откуда следует, что число вида n + n = 2n чётно? А это просто определение чётным называется число, которое делится на 2. Таким образом, общий вид чётного числа 2n, где n произвольное

целое число.

Речь идёт именно о целых, а не только о натуральных (то есть целых положительных) числах. В частности, важно понимать, что 0 тоже чётное число.

Каков же общий вид нечётного числа? $2n + 1$. Действительно, если от нечётного числа отнять 1, то оно станет чётным,

то есть нечётное число равно сумме чётного числа $2n$ и единицы.

Часто используется запись нечётного числа и в виде $2n - 1$. Из определения чётного числа сразу следует, что произведение любого (целого) числа на чётное число чётно.

Формальное доказательство: $m \; 2n = 2(mn)$.

Несколько более сложно проверить, что произведение двух нечётных чисел нечётно.

Формальное доказательство: $(2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.

Мы говорим, что два числа имеют разную чётность, если одно из них чётно, а другое нечётно. В противном случае числа имеют одинаковую чётность.

Как определить чётность суммы?

· Сумма двух чисел разной чётности нечётна.

· Сумма двух чисел одной чётности чётна.

Доказательство: $2m + (2n + 1) = 2(m + n) + 1$; $2m + 2n = 2(m + n)$,

$(2m + 1) + (2n + 1) = 2(m + n + 1)$.

Задача 2. ***Сформулируйте и докажите обратные утверждения.***

Решение. Если сумма двух чисел нечётна, то слагаемые имеют разную чётность. Действительно, если бы они имели одинаковую чётность, то сумма была бы чётной.

Если сумма двух чисел чётна, то слагаемые имеют одинаковую чётность. Доказательство аналогично.

Задача 3. Числа m и n целые. Докажите, что число mn(m+n) чётно.

Решение. Если числа m и n одинаковой чётности, то чётна их сумма m + n. Если же они разной чётности, то чётно их произведение mn. В любом случае произведение чисел mn и m+n чётно.

Задача 4. Что можно сказать о чётности разности двух чисел?

Ответ: то же, что и о сумме. Тут важно объяснить, что доказывать это отдельно не требуется:

m − n = m + (−n), то есть разность и сумма | одно и то же. Следует, правда, отметить, что при смене знака числа его чётность не меняется.

Заметим, что чётность суммы двух чисел равна чётности их разности.

При решении вводной задачи мы пользовались также признаком делимости на 2:

· число чётно тогда и только тогда, когда чётна его последняя цифра, применив его для того, чтобы выяснить нечётность числа 27.

Доказательство: любое натуральное число n можно за писать в виде

n = 10a + b, где b | его последняя цифра. Первое слагаемое 10a = 25a чётно.

Следовательно, чётность суммы 10a + b совпадает с чётностью слагаемого b.

Доказательство для отрицательных чисел сводится к замене знака и переходу к разобранному случаю натуральных чисел.

Задача 5. Сумма трех чисел нечётна. Сколько слагаемых нечётно?

Ответ: одно или три.

Решение. Нетрудно привести примеры, оказывающие, что оба случая возможны. Остальные два случая (нечётных слагаемых два или их нет совсем) легко приводятся к противоречию.

Теперь можно перейти к наиболее общей формулировке.

· Чётность суммы совпадает с чётностью количества нечётных слагаемых.

Задача 6. Не вычисляя суммы 1 + 2 + : : : + 1999, определите ее чётность.

Решение. В этой сумме 1000 нечётных слагаемых. Следовательно, она чётна.

Задача 7. На доске написаны 613 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет чётной. Верно ли это для 612 чисел?

Решение. Если сумма всех на писанных чисел чётна, то количество нечётных слагаемых чётно. Следовательно, есть чётное слагаемое; его и надо стереть. Если же сумма всех на писанных чисел нечётна, то количество нечётных слагаемых нечётно.

Значит, оно больше нуля (0 | чётное число), и можно стереть нечётное слагаемое.

Для 612 чисел утверждение неверно. Если все слагаемые нечётны, то ни одно нельзя стереть, не € испортив□ сумму.

Задача 8. В ряд выписаны все числа от 1 до 1998. Требуется расставить между ними так, чтобы полученное выражение равнялось нулю. Удастся ли это сделать?

Ответ: не удастся.

Решение. Чётность числа не зависит от оставленного перед ним знака, поэтому при любой расстановке знаков будет 999 нечётных слагаемых. Поэтому в любом случае сумма будет нечётна.

Задача 9. Можно ли числа 1, : : : , 21 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой из них максимальное число равнялось сумме всех остальных?

Ответ: нельзя.

Решение. При таком разбиении сумма чисел в каждой группе была бы чётна. А сумма всех чисел нечётна.

Тема 2 Прибавление чётного

Следующие задачи основаны на следующей идее: если на каждом шаге некоторого процесса к некоторой величине прибавляется (возможно, отрицательное) чётное число, то чётность этой величины не меняется.

Задача 1. На столе стоят шесть столбиков монет. В первом столбике одна монета, во втором - две, в третьем - три, : : : , в шестом - шесть. Разрешается на любые два столбика положить о монете. Можно ли за несколько таких операций сделать все столбики одинаковыми?

Ответ: нельзя.

Решение. Общее число монет (21) нечётно. Каждый раз прибавляется о две монеты, поэтому число монет всегда будет нечётным. А в шести одинаковых столбиках количество монет чётно.

Задача 2. Изменится ли ответ в предыдущей задаче, если в последнем столбике было не шесть, а семь монет?

Ответ: изменится.

Решение. Теперь столбики можно выровнять. Например, так: сначала прибавим о монете к первому и пятому столбикам, а потом | к третьему и пятому. В первом и втором столбиках станет по две монеты, в третьем и четвёртом по четыре, в пятом и шестом по семь. Теперь можно (за восемь операций) добавить по три монеты к третьему и четвёртому столбикам и по пять монет к первому и второму.

Неправильное решение. Конечно, изменится. Теперь общее число монет (22) чётно, и ничего не препятствует выравниванию столбиков.

Если такое □решение□ возникнет в процессе обсуждения, надо особо подчеркнуть его неправильность. В условиях задачи 2 нечётность исходного количества монет является как бы препятствием к выравниванию столбиков.

Отсутствие этого препятствия только даёт нам надежду, но ещё не означает возможность выровнять столбики, так как могут существовать другие препятствия, о которых мы ока не знаем (см. далее задачи 5, 6). Чтобы убедиться в том, что столбики выровнять можно, проще всего оказать, как это сделать.

Задача 3. Числа 1, 2, : : : , 714 записаны о порядку. Разрешается менять местами числа, стоящие через одно (например ,можно поменять 3 и 5). Можно ли с помощью таких перестановок расположить все числа в обратном порядке?

Ответ: нельзя.

Решение. Чётные числа всегда остаются на чётных местах, а нечётные | на нечётных. Поэтому число 714 не может встать на первое место.

Задача 4. На доске написаны числа 1, 2, : : : , 101. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Так продолжается до тех ор, ока на доске не останется одно число. Может ли это быть 0?

Ответ: не может.

Решение. Будем следить за суммой всех чисел на доске. Вначале она нечётна (51 нечётное слагаемое). При наших операциях вместо слагаемых m и n появляется слагаемое $m - n$, то есть сумма изменяется на чётное число $2n$. Значит, эта сумма всегда будет нечётна и не может обратиться в нуль.

Задача 5. Круг разбит на шесть секторов. В секторах стоят фишки (сначала в каждом о одной). За один ход разрешается передвинуть две фишки на один сектор в противоположных направлениях. Можно ли за несколько ходов собрать все фишки в одном секторе?

Ответ: нельзя.

Задача 7. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Решение. Ясно, что все эти числа равны. Сумма может правняться нулю только, если единиц и минус едини поровну о 11. Но тогда их произведение равнялось бы −1.

Разбор этой задачи дает повод поговорить о том, что знак при умножении ведет себя так же, как чётность

при сложении: произведение двух чисел одного знака положительно, разных знаков отрицательно.

А как должен выглядеть аналог утверждения о чётности суммы нескольких слагаемых?

· *знак произведения (отличных от нуля чисел) определяется чётностью количества отрицательных сомножителей (если это количество чётно, произведение положительно, если нечётно то отрицательно).*

Задача 8. Имеется таблица размером 17 в 17. В каждой клетке написано какое-то число. Произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбе, произведение чисел в котором тоже отрицательно.

Решение. По условию в каждой строке находится нечётное количество отрицательных чисел (и нет нулей). Так как количество строк нечётно, всего в таблице нечётное число отрицательных чисел. Значит, о крайней мере в одном из столбов (точнее, в нечётном числе столбов) их тоже нечётное число.

Произведение чисел этого столба отрицательно.

*Задача 9**. В некоторых клетках таблицы размером 25 в 25 расставили единицы, в остальных минус единицы. Затем вычислили все произведения этих чисел о строкам и о столбам.

Докажите, что сумма этих произведений не равна нулю.

Решение. Задача сводится к аналогу задачи 7. Произведение этих 50 произведений равно квадрату произведения всех чисел таблицы, то есть положительно. Поэтому среди этих произведений не может быть 25 положительных и 25 отрицательных.

3. Чередование

Задача 1. Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 357 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

Решение. После первого прыжка кролик оказался на камне, после второго на земле, после третьего на камне и т. д. Его положения на камне и на земле чередуются: осле нечётного числа прыжков он оказывается на камне, после чётного на земле. Так как кролик пришёл домой, он чётное число раз рыгал через удава.

Основная идея этого раздела:

· если нечто может находиться в двух состояниях, причём на каждом шаге эти состояния чередуются, то осле чётного числа шагов оно будет находиться в исходном состоянии, а после нечётного в противоположном.

Например, в задаче 1 состояния | положения кролика.

Задача 2. Девять шестерёнок заселены по кругу: первая со второй, вторая с третьей, : : : , восьмая с девятой, девятая с первой. Могут ли они вращаться?

Ответ: не могут.

Решение. Если бы вращение было возможно, то каждая следующая шестерёнка вращалась бы в направлении, противоположном предыдущей. Если, например, первая вращается против часовой стрелки, то вторая о часовой стрелке, третья против, : : : , девятая против, первая по часовой стрелке.

Противоречие!

Задача 2 иллюстрирует следствие нашей основной идеи:

· если нечётное число объектов стоит о кругу, то их чередование невозможно.

Задача 3. По окружности стоят 237 точек двух цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, а) стоящие рядом;

б) разделённые ровно двумя точками.

Решение. а) Если бы любые стоящие рядом точки был разного цвета, то цвета бы чередовались. Но в силу нечётности количества точек — это невозможно.

б) Оставим на окружности только каждую третью точку, остальные сотрём (это можно сделать, так как 237 делится на 3).

Согласно аналогу задачи, а) для 79 точек, теперь найдутся две точки одного цвета, которые стоят рядом. Но раньше они были разделены двумя точками.

Задача 4. Решите задачу 3б) для 239 точек.

Решение. Занумеруем все точки в том порядке, в котором они стоят о окружности. Представим себе кузнечика, который прыгает через две точки на третью: с первой на четвёртую, с четвёртой | на седьмую и т. д. После 79 прыжков он окажется на 238-й точке, с неё рыгнет на вторую, с нее | на пятую и т. д.

После 239 прыжков он вернётся на первую точку (побывав на каждой точке ровно один раз). Поскольку чередование невозможно, какой-то его прыжок должен соединять точки одного цвета.

Задача 5. При кузнечика на прямой играют в чехарду: каждую секунду один из них рыгает через какого-то другого (но не через двух). Могут ли они через 111 секунд вернуться на свои места?

Ответ: не могут.

Решение. В каждый момент два кузнечика меняют свое взаимное положение• (если до хода один из них был левее другого, то после хода | наоборот). Чтобы вернуться на свои места, каждые два должны поменять взаимное положение чётное число раз. Но сумма трёх чётных слагаемых не может равняться 111.

Задача 6. Кузнечик рыгает по прямой. За один раз он рыгает на 15 или 17 см вправо или влево. Может ли он за 20 прыжков продвинуться на 101 см (от исходного положения)?

Ответ: не может.

Решение. Чётность его координаты (расстояние от исходного положения) при каждом прыжке меняется. Поэтому через 20 прыжков он окажется в точке с чётной координатой (на чётном расстоянии от начала).

Как мы видим, частным случаем основной идеи является следующее:

· если к какой-то величине на каждом шаге прибавляется нечётное число, то чётность этой величины на каждом

чётном шаге совпадает с исходной, а на каждом нечётном отличается от исходной.

Задача 8. По кругу расставлены несколько чисел, причем сумма любых двух соседних нечётна. Докажите, что количество чисел чётно.

Решение. Так как сумма соседних чисел нечётна, их чётности чередуются. Но чередование о кругу возможно только при чётном количестве объектов.

Задача 9. Катя и её друзья встали о кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей пять. А сколько девочек?

Ответ: четыре.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В своей работе я изучил свойства чётных и нечётных чисел и продемонстрировал как это понятие может использоваться при решении олимпиадных задач.

Я подтвердил свою гипотезу : научившись решать задачи на четность , я стал призером региональной олимпиады (ТОИПКРО) .

Для этого я привел в работе примеры таких задач с решениями. Самым распространённым оказался метод от противного, когда мы полагаем, что задача имеет решение, но в ходе рассуждений приходим к противоречию со свойствами чётных – нечётных чисел.

Я составил собственные задачи по теме, продемонстрировал их решение.

Таким образом, я реализовал поставленные в исследовании цели. Моя разработка может быть полезной для проведения занятий математического кружка, а также для подготовки к олимпиадам.

Список литературы

1. Математика. 5-6 класс. Под ред. Г. В. Дорофеев., И. Ф. Шарыгин, - 4-е изд. – М., Просвещение, 2016 - 216с.
2. Математический энциклопедический словарь
3. Пифагор: союз истины, добра и красоты. – М.: Просвещение,1993.
4. Разные источники интернета
5. Справочник школьника по математике