III Международная конференция учащихся
«НАУЧНО-ТВОРЧЕСКИЙ ФОРУМ»

Научно-исследовательская работа

Предмет: Физика

МАГИЯ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Выполнил:
Баев Никита Юрьевич
учащийся __9___ класса
МОАУ «Гимназия №5», Россия, г. Оренбург

Руководитель:
Баева Оксана Сергеевна
учитель математики и физики
МОАУ «Гимназия № 5» , Россия, г. Оренбург

Оглавление: Стр.

Введение

Древняя история богата выдающимися математиками. Многие достижения древней математической науки до сих пор вызывают восхищение остротой ума их авторов. А имена: Евклида, Архимеда, Герона - известны каждому образованному человеку.

Иначе обстоит дело с математикой средневековья. Кроме Виеты, жившего уже в шестнадцатом столетии, и математиков более близких нам времен, школьный курс математики не называет ни одного имени, относящегося к средним векам. Это, конечно, не случайно. Математика в эту эпоху развивалась чрезвычайно медленно, и крупных математиков тогда было очень мало.

Тем больший интерес представляет для нас сочинение «Libber abaci» («Книга об абаке»), написанная знаменитым итальянским математиком из Пизы, Леонардо Пизанским (Leonardo Pisano, родился ок. 1170г. –1228г.), который известен больше по своему прозвищу Фибоначчи (Fibonacci - сокращенное filius Bonacci, т.е. сын Боначчи).[1]

Леонардо Фибоначчи

В 1170 г. В Итальянском городе Пиза в семье нотариуса родился сын Леонардо, мальчика называли Фибоначчи – сын Боначчи. Под этим именем Леонардо Пизанский, ставший впоследствии известным математиком, часто упоминается в истории науки. Образование, полученное в Алжире, Леонардо постоянно пополнял во время путешествий с отцом в разных странах Средиземноморья. Внимательно изучив достижения арабской математики, Леонардо подытожил их в трактате «Книга об абаке» (1202). Абак – это простейший вычислительный прибор, прародитель счетов. Но в книге речь шла не об этом приборе, а об искусстве вычислений. Труд получился грандиозным – достаточно сказать, что уже в печатаном виде книга содержала 460 страниц.. В ней Леонардо познакомил широкий круг европейцев с десятичной системой счисления, которой пользовались арабы, и показал ее преимущество перед римской нумерацией, применявшейся в Европе.

Помимо задач практического характера книга содержала правило приближенного извлечения корней, способы решения систем линейных уравнений, неопределенных уравнений и их систем, в частности – решение китайской задачи о делении с остатком. В этом трактате многое для европейской математики оказалось новым: использовались отрицательные числа, которые трактовались как долг, был введен термин «частное», в записи

[1] Согласно [9, стр. 38] «Леонардо Пизанский».

дроби появилась разделительная черта между числителем и знаменателем и т.д. Содержались в книге и собственные результаты Леонардо, в частности – решение задачи о размножении кроликов (о ней пойдет речь ниже) и задачи о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить на рычажных весах все грузы, вес которых выражается целыми числами, не превышающими фиксированного натурального числа. Эта задача да сих пор остается популярной.[1]

Эта книга, написанная в 1202 г., дошла до нас во втором своем варианте, который относится к 1228 г. – трактат об арифметике (*индуктивные цифры, Фибоначчиевы числа*) и алгебре (*до квадратных уравнений включительно*). «Practice Geometriae» 1220 г., которые являются первыми произведениями, содержащими задачи на приложение алгебры и геометрии.[2]

«Libber abaci» представляет собой объемистый труд, содержащий почти все арифметические и алгебраические сведения того времени и сыгравший заметную роль в развитии математики в Западной Европе в течение нескольких следующих столетий. Именно по этой книге европейцы познакомились с индусскими («арабскими») цифрами. Сообщаемый в «Liber abaci» материал поясняется на большом числе задач, составляющих значительную часть этого трактата.

Актуальность темы в том, что за многовековую историю познания чисел Фибоначчи и их различные инварианты отражаются во всех творениях мироздания, все они продуманы и подчинены единым законам природы и имеют большой практический и теоретический интерес во многих науках.

Целью данной работы является исследование закономерностей числового ряда Фибоначчи.

Практическая значимость - использование приобретенных знаний и навыков исследовательской работы при изучении других школьных предметов

Новизна исследования - открытие чисел Фибоначчи в окружающей нас действительности.

Задачи исследования:

1. Изучить ряды Фибоначчи;
2. Рассмотреть примеры золотого сечения в науке и природе;

Объект исследования: человек, математические абстракции, созданные человеком, изобретения человека, окружающий животный и растительный мир.

Предмет исследования: форма и строение исследуемых предметов и явлений.

Методы исследования:

1. Теоретический (логическая ступень познания).
2. Эмпирический (наблюдение, эксперимент, измерение)
3. Индуктивный метод (от частного к обобщенному).
4. Рекурентный (каждый последующий определяется через предыдущие).

---

[1] Согласно [12, стр. 18 - 21] «Эпоха средневековья».
[2] Согласно [10, стр. 479 - 480] « Фибоначчи числа».

1. Понятие и простейшие свойства чисел Фибоначчи.

Рассмотрим следующую числовую последовательность:

u_1 , u_2 , . . . , u_n, (1)

в которой каждый член равен сумме двух предыдущих членов, т. е. при всяком

$n > 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ (2)

Такие последовательности, в которых каждый член определяется как некоторая функция предыдущих, называются *рекуррентными* или, по-русски, *возвратными* последовательностями. Сам процесс последовательного определения элементов таких последовательностей называется *рекуррентным процеесом*, а равенство (2) - *возвратным (рекуррентным) уравнением.*

Заметим, что по одному только условию (2) члены последовательности (1) вычислять нельзя. Можно составить сколько угодно различных числовых последовательностей, удовлетворяющих этому условию; например,

2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, . . . , или 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, . . . , или -1, -5, -6, -11, -17, . .

Значит, для однозначного построения последовательности (1) условия (2) явно недостаточно, и нам следует указать некоторые дополнительные условия.

Начнем с того, что не всякий член последовательности (1) может 6ыть получен при помощи (2), т.к. не у каждого члена (1) имеется два предшествующих; например, перед первым членом последовательности вообще не стоит ни одного члена, а перед вторым - только один. Значит, вместе с условием (2) нам нужно знать два ее первых члена. Этого достаточно, чтобы вычислить любой член последовательности (1).

В самом деле, $\mathbf{u_3}$ можно вычислить как сумму заданных нам $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u_2}$;

$\mathbf{u_4}$ - как сумму $\mathbf{u_2}$ и вычисленного ранее $\mathbf{u_3}$;

$\mathbf{u_5}$ - как сумму уже вычисленных $\mathbf{u_3}$ и $\mathbf{u_4}$ и т. Д. Переходя, таким образом, можем дойти до члена с любым наперед заданным номером и вычислить его.

Обратимся, теперь к важному частному случаю последовательности (1), когда $u_1 = 1$ и $u_2 = 1$. Условие (2) дает нам возможность вычислять последовательно один за другим все члены этого ряда. Нетрудно проверить, что в этом случае первыми четырнадцатью его членами будут числа 1, 1, 2, 3, 5, 8 , 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, … которые встречаются нам в задаче о кроликах.[1]

В честь автора этой задачи вся последовательность (1) при $\mathbf{u_1} = \mathbf{u_2} = \mathbf{1}$ **н**азывается *рядом Фибоначчи*, а члены ее — *числами Фибоначчи.*[2]

Числа Фибоначчи обладают целым рядом интересных и важных свойств.

1. Вычислим сначала *сумму первых n чисел Фибоначчи*. Именно, докажем, что $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1.$ (1.1)

В самом деле, мы имеем:

$u_1 = u_3 - u_2$,

$u_2 = u_4 - u_3$,

$u_3 = u_5 - u_4$,

[1] Согласно [Приложение 1] «Задача о кроликах».

[2] Согласно [4, стр. 8-10] «Числа Фибоначчи».

$. \ . \ . \ . \ . \ . \ .$

$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$,

$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$,

Сложив все эти равенства почленно, мы получим $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - u_2$, и нам остается вспомнить, что $u_2 = 1$.

2. *Сумма чисел Фибоначчи с нечетными номерами*:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}. \qquad (1.2)$$

Для доказательства этого равенства напишем

$u_1 = u_2$,

$u_3 = u_4 - u_2$,

$u_5 = u_6 - u_4$,

$. \ . \ . \ . \ . \ . \ .$

$u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}$.

Сложив эти равенства почленно, мы и получим требуемое.

3. *Сумма чисел Фибоначчи с четными номерами*:

$$u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1. \qquad (1.3)$$

На основании п. 1 мы имеем $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$; вычтя почленно из этого равенства равенство (1.2), мы получим, что требовалось: $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1$.

Вычитая, далее, почленно (1.3) из (1.2), получаем

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1. \qquad (1.4)$$

Прибавим теперь к обеим частям (1.4) по u_{2n+1}:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1. \qquad (1.5)$$

Объединяя (1.4) и (1.5), получаем *выражение для знакопеременной суммы чисел Фибоначчи:* $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1$. (1.6)

4. Формулы (1.1) и (1.2) были выведены при помощи почленного сложения целой серии очевидных равенств. Еще одним примером применения этого приема может служить вывод *формулы для суммы квадратов первых n чисел Фибоначчи.* $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$. (1.7)

Заметим для этого, что $u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2$.

Сложив почленно равенства

$u_1^2 = u_1 u_2$

$u_2^2 = u_2 u_3 - u_1 u_2$

$u_3^2 = u_3 u_4 - u_2 u_3$

$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$

$u_n^2 = u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n$ мы получаем формулу (1.7).

5. Простейшей реализацией идеи индукции в применении к числам Фибоначчи является само определение чисел Фибоначчи. Оно состоит в указании двух первых чисел: $u_1 = 1$ и $u_2 = 1$ и в индуктивном переходе от u_n и u_{n+1} к u_{n+2}, даваемым рекуррентным соотношением $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$.

Отсюда следует, что если некоторая последовательность чисел начинается с двух единиц, а каждое из следующих получается сложением двух предыдущих, то эта последовательность является последовательностью чисел Фибоначчи.

2. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ГЕОМЕТРИЯ

1. Разделим отрезок $A\ B$ единичной длины (рисунок 1) на две части так, чтобы большая из его частей являлась средним пропорциональным между меньшей его частью и всем отрезком.

Обозначим искомую длину большей части отрезка через *x*. Длина его меньшей части будет равна 1- *x,* и условие задачи дает нам пропорцию

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x} \qquad (2.1)$$

Откуда $$x^2=1-x \qquad (2.2)$$

Положительным корнем (1.2) является $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, так что отношения в пропорции (1.1) равны $\frac{1}{x}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha$

такое деление (точкой C_1) называется *делением в среднем и крайнем отношении.* Его называют *золотым делением* или *золотым сечением.*[1]

Если взять отрицательный корень уравнения (2.2), то делящая точка C_2 окажется вне отрезка *AB* (внешнее деление), как видно из рисунка 1. Легко показать, что и здесь мы имеем дело с золотым сечением: $\frac{C_2B}{AB}=\frac{AB}{C_2A}=\alpha$.

2. Построение точки, делящей отрезок золотым сечением:

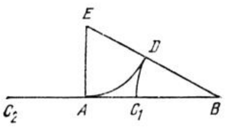


Рисунок 3

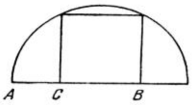


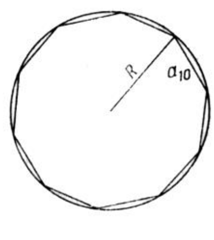
Рисунок 4

Пусть *AB*=1; восстановим из точки *A* перпендикуляр и возьмем точку *E*, для которой $AE=\frac{1}{2}$ (рисунок 3). Тогда $EB=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Проведя из *E,* как из центра, дугу через *A* до пересечения с *EB* в точке *D,* мы получаем $BD=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Наконец, проведя через *D* дугу с центром в *B,* мы находим искомую точку C_1. Точку внешнего деления C_2 можно найти из условия $AC_2=BC_1$.

3. Золотое сечение довольно часто встречается в геометрии. Например, для квадрата, вписанного в полукруг (рисунок 4), точка *C* делит золотым сечением отрезок *AB.* Сторона a_{10} правильного десятиугольника (рисунок 5), вписанного в круг радиуса *R,* как известно, равна $2R\sin\frac{360^0}{2\cdot 10}$,



т. е. $2R\sin 18^0$. Вычислим sin 18°.

[1] Согласно [7. стр. 25] «Золотое сечение».

На основании известных формул тригонометрии

$\sin 36° = 2 \sin 18° \cos 18°$, $\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18°$,

так что $\sin 72^0 = 4\sin 18^0 \cos 18^0 (1 - 2\sin^2 18^0)$ (2.3)

Так как $\sin 72^0 = \cos 18^0 \neq 0$, из (2.3) следует, что $1 = 4\sin 18^0 (1 - 2\sin^2 18^0)$, и потому $\sin 18°$ является одним из корней уравнения $1 = 4x(1 - 2x^2)$ или $8x^3 - 4x + 1 = 0$.

Разложив левую часть последнего уравнения на множители, мы получаем

$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$, откуда $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Так как $\sin 18°$ есть положительное число, отличное от $\frac{1}{2}$, имеем $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2\alpha}$.

Заметим для дальнейшего, что

$$\cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = 1 - 2\frac{1}{4\alpha^2} = 1 - \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} = \frac{2 + 2\alpha - 1}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha + 1}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^3}{2\alpha^2} = \frac{\alpha}{2}$$

Таким образом, $a_{10} = 2R\frac{\sqrt{5}-1}{4} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{R}{\alpha}$.

Значит, a_{10} равно большей части радиуса круга, разделенного золотым сечением.

Практически при вычислении a_{10} можно вместо α брать отношение соседних чисел Фибоначчи и считать приближенно, что a_{10} есть $\frac{8}{13}R$ или даже $\frac{5}{8}R$.

4. Рассмотрим правильный пятиугольник. Его диагонали образуют правильный звездчатый пятиугольник (рисунок 6).

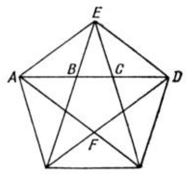


Рисунок 6

Угол AFD равен 108°, а угол ADF равен 36°. Значит, по теореме синусов

$$\frac{AD}{AF} = \frac{\sin 108^0}{\sin 36^0} = \frac{\sin 72^0}{\sin 36^0} = 2\cos 36^0 = 2\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \alpha$$

Так как очевидно, что $AF = AC$, должно быть $\frac{AD}{AF} = \frac{AD}{AC} = \alpha$,

и точка C делит отрезок AD золотым сечением.

Но тогда, по определению золотого сечения, $\frac{AC}{CD} = \alpha$.

Замечая, что $AB = CD$, мы получаем $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \alpha$.

Таким образом, среди отрезков: BC, AB, AC, AD каждый последующий в α раз больше предыдущего, и $\frac{AD}{AE} = \alpha$.[1]

5. Возьмем прямоугольник со сторонами a и b и будем вписывать в него наибольшие квадраты, как это показано на рисунке 7.

[1] Согласно [8, стр. 57-65] «Золотое сечение».

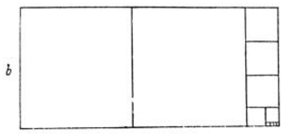


Рисунок 7

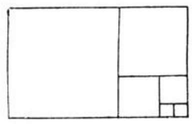


Рисунок 8

Если разбивать так на квадраты прямоугольник, стороны которого относятся как соседние числа Фибоначчи (рисунок 8), то все квадраты, кроме двух самых маленьких, будут различными.

Так как стороны всех этих квадратов равны соответственно u_1, $u_2, \dots, u_n$, их суммарная площадь, очевидно, равна $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$

Но это и есть площадь разбиваемого нами прямоугольника, равная $u_n u_{n+1}$.

Таким образом, при любом n $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$,

6. Пусть теперь отношение сторон прямоугольника равно α. (Такие прямоугольники мы будем для краткости называть *прямоугольниками золотого сечения.)* Докажем, что, вписав в прямоугольник золотого сечения наибольший возможный квадрат, мы снова получим прямоугольник золотого сечения.

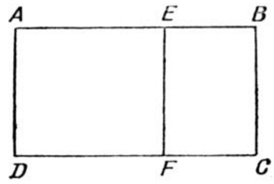


Рисунок 9.

В самом деле, $\frac{AB}{AD} = \alpha$; по условию $AD = AE = EF$, так как $AEFD$ - квадрат.

Значит, $\frac{EF}{EB} = \frac{AB - EB}{EB} = \alpha^2 - 1$. Но $\alpha^2 - 1 = \alpha$, так что $\frac{EF}{EB} = \alpha$.

На рисунке 10,11 показано, как прямоугольник золотого сечения может быть «почти весь» исчерпан квадратами /, //, ///, ... При этом каждый раз после вписывания очередного квадрата будет оставаться фигура, являющаяся прямоугольником золотого сечения.[1]

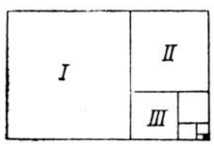


Рисунок 10

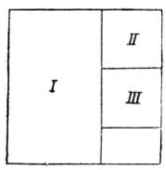


Рисунок 11

7. По аналогии с прямоугольниками золотого сечения можно говорить и о *треугольниках золотого сечения:* остроугольном - с углами 36°, 72° и 72° и тупоугольном - с углами 108°, 36° и 36°. На рис. 12 видно, как остроугольный треугольник золотого сечения разбивается на меньшие три треугольника золотого сечения, и обозначены величины углов и отрезков.

Рисунок 12

[1] Согласно [6, стр. 43-51] «Загадки прямоугольника».

3. Числа Фибоначчи и теория поиска

1. Известно, что при очень малых скоростях автомобиль расходует на каждый километр пути сравнительно много бензина. Велик его расход и на больших скоростях. Какая-то промежуточная скорость является при этом «оптимальной»: при передвижении с этой скоростью автомобиль расходует на километр пути наименьшее количество горючего. Таким образом, мы можем предполагать, что примерный график зависимости расхода автомобилем горючего на километр пути от скорости автомобиля имеет вид, изображенный на рис. 20: сначала, по мере роста скорости, километровый расход горючего убывает до некоторой минимальной величины, а потом, с дальнейшим ростом скорости, начинает неуклонно (как принято говорить в математике, «монотонно») возрастать.

Хотя общие очертания графика этой зависимости (сначала спуск, а потом подъем) одинаковы практически для всех автомобилей, его точная форма может несколько изменяться даже в пределах автомобилей одного типа, завися от индивидуальных особенностей машины, от степени износа тех или иных ее механизмов и устройств и т. д. В частности, и минимум на нашем графике также может располагаться в довольно широких пределах.

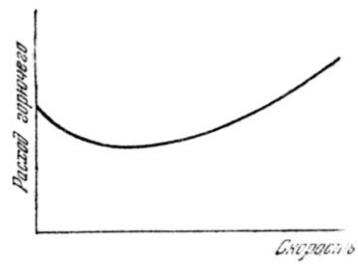


Рисунок 13

Предположим теперь, что мы получили в свое распоряжение автомашину и хотим предпринять путешествие по такой местности, где в пути не удастся заправиться топливом. Для того чтобы иметь возможность проехать наибольшее расстояние, мы должны достаточно точно определить скорость, соответствующую минимальному расходу горючего. Эта скорость обычно называется *наиболее экономичной скоростью.*

Определять наиболее экономичную скорость автомобиля естественнее всего опытным путем, проезжая с различными скоростями участки дороги, характер и качество которой типичны для условий предстоящего путешествия, и замеряя каждый раз расход бензина. Так как это занятие не из веселых, естественно задуматься над следующими вопросами: сколько опытов достаточно поставить для того, чтобы определить наиболее экономичную скорость автомобиля с заданной точностью? На каких скоростях следует определять в этих опытах расходы горючего? Близкими к этим вопросам являются следующие два: как организовать данное число опытов, чтобы найти экономичную скорость с наибольшей точностью? Какова эта наибольшая точность?

При этом под определением наиболее экономичной скорости *«с точностью до данного* ε*»* мы будем понимать указание такой скорости v, что истинное значение наиболее экономичной скорости лежит между $v-\varepsilon$ и $v+\varepsilon$ (т. е. что ошибка в определении этой скорости не может превосходить ε).

Для определенности будем считать заранее известным, что наиболее экономичная скорость нашего автомобиля лежит между некоторыми пределами v' И v''. В качестве v' следует взять скорость, которая заведомо не превосходит наиболее экономичной, а в качестве v'' — такую скорость, которая заведомо не меньше ее. (Например, в качестве v' можно взять наименьшую скорость, при которой еще возможна устойчивая работа мотора, а в качестве v''—максимальную скорость данного автомобиля.)

В поставленной проблеме, как и в широком круге аналогичных ей проблем, участвуют три фактора: *цели,* которые мы перед собой ставим, *возможности,* которыми мы располагаем для осуществления этих целей, и, наконец, те *условия,* в которых мы используем наши возможности для достижения целей.

В нашем случае цель состоит в повышении точности определения минимизирующей точки, т. е. в уменьшении ошибки, с которой указывается эта точка.

Возможности состоят в точном определении тем или иным путем (вычислением, измерением или, на худой конец, простым угадыванием) некоторого числа значений функции f в произвольно выбираемых нами точках **и** в сравнениях между собой найденных в различных точках значений по их величине.

Наконец, условия определяются величиной области задания функции f, т. е. длиной L отрезка между x' и x''.

4. Числа Фибоначчи и биноминальные коэффициенты

Рассмотрим биноминальные коэффициенты, которые непосредственно связаны с числами Фибоначчи и выявим некоторые закономерности, связывающие эти два класса чисел.

Биноминальными коэффициентами называются коэффициенты при степенях x в разложении степеней $(1 + x)^n$:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n \quad . \qquad (1.8)$$

Где числа C_n^k однозначно определены при всех целых неотрицательных n и всех целых неотрицательных k, не превосходящих n.

Предварительно установим некоторые свойства биноминальных коэффициентов.

Положив в (1.8) $n = 1$, мы сразу видим, что $C_1^0 = C_1^1 = 1$;
кроме того, имеет место следующая лемма.

Лемма. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Доказательство. Мы имеем : $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x)$,
или, пользуясь определением биноминальных коэффициентов,

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 x + \ldots + C_{n+1}^{k+1} x^{k+1} + \ldots + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} =$$
$$= (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + C_n^{k+1} x^{k+1} + \ldots + C_n^n x^n)(1 + x) =$$
$$= C_n^0 + (C_n^0 + C_n^1) x + \ldots + (C_n^k + C_n^{k+1}) x^{k+1} + \ldots + (C_n^{n-1} + C_n^n) x^n + C_n^n x^{n+1}.$$

Так как левая и правая части равны, то и коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа должны быть равны, то есть

$$C_{n+1}^{\,k+1} = C_n^{\,k} + C_n^{\,k+1},$$

а это и требовалось доказать.

Из доказанной леммы следует, что биноминальные коэффициенты можно вычислять при помощи рекуррентного процесса, подобного процессу получения чисел Фибоначчи, только значительно более сложной природы. Это же обстоятельство дает нам возможность доказывать по индукции утверждения о биноминальных коэффициентах.

7. Расположим биноминальные коэффициенты в виде следующей таблицы, называемой *треугольником Паскаля*:

$C_0^{\,0}$

$C_1^0 \;\; C_1^1$

$C_2^0 \;\; C_2^1 \;\; C_2^2$

. . . .

$C_n^0 \;\; C_n^1 \; C_n^2 \ldots \; C_n^n$

. . . .

т.е. 1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

. . . .

Строки треугольника Паскаля принято нумеровать сверху вниз, причем верхняя строка, состоящая из единственной единицы, считается нулевой.

Из предыдущего вытекает, что крайние члены в каждой из строк треугольника Паскаля равны единице, а каждый из остальных членов таблицы получается путем сложения двух других, стоящих непосредственно над ним[1].

8. Формула (1.8) позволяет нам сразу вывести два важных соотношения, связывающих биноминальные коэффициенты, составляющие одну строку треугольника Паскаля.

Полагая в (1.8) $x = 1$, мы получаем

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n .$$

Если же принять $x = -1$, то мы получим

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n .$$

9. Проведем через числа треугольника Паскаля линии, идущие под углом 45 градусов к его строкам, и назовем их *восходящими диагоналями* треугольника Паскаля. Восходящими диагоналями будут, например, прямые, проходящие через числа 1, 4, 3 или 1, 5, 6, 1.

Покажем, что сумма чисел, лежащих на некоторой восходящей диагонали, есть число Фибоначчи.

---

[1] Согласно[11, стр. 168-173] «Треугольник Паскаля».

В самом деле, первая, самая верхняя восходящая диагональ треугольника Паскаля состоит только из единицы. Только из единицы состоит и вторая его диагональ. Для доказательства интересующего нас предложения нам достаточно показать, что сумма всех чисел, составляющих n-ю и n+1-ю диагонали треугольника Паскаля, равна сумме чисел, составляющих его n+2-ю диагональ.

Но на n-й диагонали расположены числа C_{n-1}^0, C_{n-2}^1, C_{n-3}^2, . . . ,
а на n+1-й – числа C_n^0, C_{n-1}^1, C_{n-2}^2, . . .

Сумму всех этих чисел запишем так:

$C_n^0 + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2) + \ldots,$

или, принимая во внимание лемму в п. 11,

$C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \ldots$

Последнее выражение есть сумма чисел, лежащих на n+2-й восходящей диагонали треугольника. [1]

Из только что доказанного на основании формулы (1.1) мы сразу получаем: сумма всех биноминальных коэффициентов, лежащих выше n-й восходящей диагонали треугольника Паскаля (включая саму эту диагональ), равна u_{n+2} - 1.

Используя формулы(1.2), (1.3), (1.4) и подобные им, можно получить дальнейшие тождества, связывающие числа Фибоначчи с биноминальными коэффициентами.

Оказывается, однако, что любое число Фибоначчи можно определить и непосредственно, как некоторую функцию его номера.

4. Числа Фибоначчи в бизнесе

Рассмотрим применение закона золотого сечения в бизнесе на практике. Допустим, вы купили ящик апельсинов за 1 рубль (рубль в данном случае условная единица) и продали за 2 рубля. Получили прибыль 100%. Как действовать дальше? Купить на эти 2 рубля еще 2 ящика и продать, т.к. на данный момент они не подорожали и пользуются достаточно хорошим спросом?

Вот это и есть самая распространенная ошибка начинающих бизнесменов!

НЕТ! Правильно будет, в соответствии с законом золотого сечения, купить еще один ящик, продать с теми же 100% прибыли, и только потом купить 2 ящика.

То есть действуем по указанному принципу получения ряда чисел Фибоначчи:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,
144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765,
10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418,
317811, 514229, 832040, 1346269

[1] Согласно[19] «Треугольник Паскаля».

Как видим, всего за 32 цикла можно достичь прибыли свыше миллиона рублей! И при этом еще и всегда оставались "лишние" деньги!

Кроме того, этот принцип - хорошая страховка от форс-мажорных обстоятельств. Ведь, если в самом начале, получив прибыль в 1 рубль и имея 2 рубля на руках и вложив их сразу все, есть риск потерять все. А так у нас 1 рубль остался в запасе, во всяком случае, не в минус уйдем. С 1 рубля можно начинать новый цикл или новый бизнес.

И всё-таки, в связи со всем увиденным и прочитанным, возникают вполне закономерные вопросы: Откуда взялись эти числа? Кто этот архитектор вселенной, попытавшийся сделать её идеальной? Было ли когда-то всё так, как он хотел? Что же будет дальше? Спираль скручивается или раскручивается?

Найдя ответ на один вопрос, получишь следующий. Разгадаешь его, получишь два новых. Разберёшься с ними, появится ещё три. Решив и их, обзаведёшься пятью нерешёнными…

Заключение.

Числа Фибоначчи, выросшие из знаменитой задачи о кроликах, до сих пор остаются одной из самых увлекательных глав элементарной математики.

Числа Фибоначчи применяются в алгебре при изучении элементов теории делимости, числовых свойств; в комбинаторике – при изучении свойств биноминальных коэффициентов, а также в теории поиска и в теории графирования.

Кроме того, свойства чисел Фибоначчи используются при решении геометрических задач, включая «золотое сечение», при исследовании биологических моделей и в анатомии, астрономии и физике.

Есть предположение, что последовательность Фибоначчи - это попытка природы адаптироваться к более фундаментальной и совершенной золотосечённой логарифмической последовательности, которая практически такая же, только начинается из ниоткуда и уходит в никуда.

Природа не может создать что-то из ничего, ей обязательно нужно какое-то целое начало, от которого можно оттолкнуться. Для определения любой последовательности достаточно знать три её члена, идущие друг за другом. а для золотой последовательности, ей достаточно двух. Она является геометрической и арифметической прогрессией одновременно. Можно подумать, будто она основа для всех остальных последовательностей. Единство, основанное на проявлении одних и тех же закономерностей в разнородных явлениях природы, сохранила свою актуальность от Пифагора до наших дней.

Список литературы.

1. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.
2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: «Просвещение», 1989.
3. Виноградов И. М., Математическая энциклопедия, т. 5,   Слу – я – М., «Советская энциклопедия», 1985, 1248 ст.
4. Воробьев Н. Н., Числа Фибоначчи.- 4 – е изд. доп. – Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1978 .
5. Глейзер Г. М. журнал «Математика в школе» - М.: 1982.
6. Кардемский Б. А. Математическая смекалка. – М.: Физматгиз, 1963.
7. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. Перевод с английского Катка А.В. и Каток С.Б. под ред. Б.А. Резенфельда и И.М. Яглома – М.: «Наука», 1964.
8. Кокстер Г. С., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. Перевод с английского Савина А. П., Савиной Л. А. под редакцией Савина А. П. – М.: «Наука», 1978.
9. Крысицкий В. Шеренга великих математиков, Варшава, изд-во «Наша Ксенгардия», 1981.
10. Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И, Федин Н. Г. под редакцией профессора Диткина В. А. Толковый словарь математических терминов. Пособие для учителей. – М.: «Просвещение», 1965 .
11. Новоселов С. И. Спец курс элементарной алгебры. Учебное пособие для пед. унив-в, Изд. – 6 –е – М.: «Высшая школа», 1956.
12. Рахманов Л., журнал «Наука и жизнь» № 4, 1990
13. Спивак А., журнал «Квант», физико – математический журнал для школьников и студентов, № 2, Издательство – Бюро Квантум, 2003 .
14. Шибасов Л., Шибасова З., журнал «Квант», физико – математический журнал для школьников и студентов, № 2, Издательство – Бюро Квантум, 2005 .
15. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп–М.:«Высшая школа»,1949
16. Режим доступа: http://www.goldenmuseum.com/0401Fibonacci_rus.html.
17. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/
18. Режим доступа: http://samlib.ru/s/shkrudnew_f_d/osnovy-30.shtml.
19. Режим доступа: http://www.goldennumber.net/plants/

Приложение

1. Задача о кроликах

Рассмотрим одну задачу, помещенную на стр. 123—124 рукописи 1228 г. «Сколько пар кроликов в один год от одной пары рождается»?

Некто поместил пару кроликов в изолированном месте, чтобы знать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения.

Так как первая пара в первом месяце дает потомство, в этом месяце окажутся 2 пары; из них одна пара, а именно первая, рождает и в следующем месяце, так что во втором месяце оказывается 3 пары. Из них в следующем месяце 2 пары будут давать потомство, так что в третьем месяце родятся еще 2 пары кроликов, и число пар кроликов в этом месяце достигнет 5. Из них в этом же месяце будут давать потомство 3 пары, и число пар кроликов в четвертом месяце достигнет 8; из них 5 пар произведут другие 5 пар, которые, сложенные с 8 этом месяце дадут в пятом месяце 13 пар. Из них 5 пар не дают в том же месяце потомства, а остальные 8 пар рождают, так что в шестом месяце оказывается 21 пара. Сложенные с 13 парами, которые родятся в седьмом месяце, они дают 34 пары; сложенные с 21 парой, рожденной в 8 месяце, они дают в этом месяце 55 пар. Сложенные с 34 парами, рожденными в девятом месяце, они дают 89 пар; сложенные вновь с 55 парами, которые рождаются в десятом месяце, они дают в этом месяце 144 пары; снова сложенные с 89 парами, которые рождаются в одиннадцатом месяце, они дают в этом месяце 233 пары; сложенные вновь с 144 парами, рожденными в последнем месяце, они дают 377 пар; столько пар произвела первая пара в данном месте к концу одного года.

Месяцы		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Зрелых пар	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**	**233**
Всех пар	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	***377***

В таблице видно как это делается: мы складываем первое число со вторым, т. е. 1 и 2; и второе с третьим; и третье с четвертым; и четвертое с пятым. И так одно за другим, пока не сложим десятое с одиннадцатым, т.е. 144 с 233; и мы получим общее число упомянутых кроликов, т. е. 377; и так можно делать по порядку до бесконечного числа месяцев».[1]

2. Числа Фибоначчи и природа

Природа дает нам многочисленные примеры расположений однородных предметов, описываемых числами Фибоначчи. В разнообразных спиралевидных расположениях мелких частей растений можно увидеть два семейства спиралей. В одном из этих семейств спирали завиваются по часовой

[1] Согласно [14, стр. 7-8] « Фибоначчиевы кролики».

стрелке, а в другом - против. Числа спиралей того и другого типов часто оказываются соседними числами Фибоначчи. Так, взяв молодую сосновую веточку, легко заметить, что хвоинки образуют две спирали, идущие справа снизу налево вверх. Вместе с тем они же составляют три спирали, идущие слева снизу направо вверх.

На многих шишках семена (т.е. «чешуйки») расположены в трех спиралях, плотно навивающихся на стержень шишки. Они же расположены в пяти спиралях, круто навивающихся в противоположном направлении. В крупных шишках удается наблюдать 5 и 8 и даже 8 и 13 спиралей. Хорошо заметны спирали и на ананасе: обычно их бывает 8 и 13.

У многих сложноцветных (у маргаритки или ромашки) заметно спиральное расположение отдельных цветков в соцветиях-корзинках. Число спиралей бывает 13 в одном направлении и 21 в другом или даже соответственно 21 и 34. число направлений может достигать соответственно 55 и 89.

Семена в подсолнухе, в шишке располагаются так же в виде спирали. Корзинка подсолнуха имеет число семян равное 1000, которые распределены по 13 «левым» и 8 «правым» ветвям. Причем каждая чешуйка, имея четыре стороны, соседствует с четырьмя другими чешуйками, угол наклона φ = 137°30'28.На рисунке 13, 14 мы видим, как скачкообразно происходит изменение направления и числа дуг, отвечающих смежным числам Фибоначчи (34, 21), (55, 34), (89, 55).

Малейшее отклонение угла φ от значения 137°30'28 приводит к радикальной смене упаковки семян. В этой упаковке семечки находятся не в одинаковом положении относительно своих соседей, т.е. одни семечки имеют большее «жизненное пространство», другие меньшее. Три упаковки семян при трех различных углах φ. Две крайние упаковки не выгодны для выживания семян.

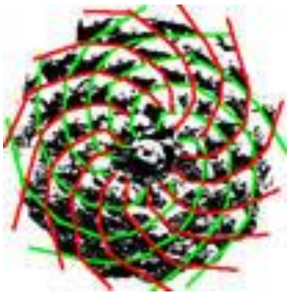


Рис. 13

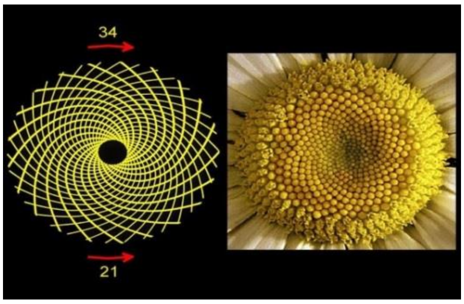


Рис. 14.

Пауки плетут свою сеть по спирали и стадо, на которое нападает хищник, тоже разбегаются по спирали.

У ананаса имеется не две, а три спиральных дуги с числами Фибоначчи 5, 8 и 13, так что каждая его гексагональная чешуйка соседствует уже с шестью другими чешуйками. Упаковка семян в ананасе и шишке равномерно плотная. Эта оптимальная конфигурация обеспечивается свойствами чисел Фибоначчи. Для ананаса этот факт очевиден: ему нужно, чтобы выполнялось условие 13 = 8 + 5, если вместо 8 рядов будет 9, то возникнет противоречие.

Интересно, что спиралью закручивается ураган, облака циклона (рис.15) и это хорошо видно из космоса:

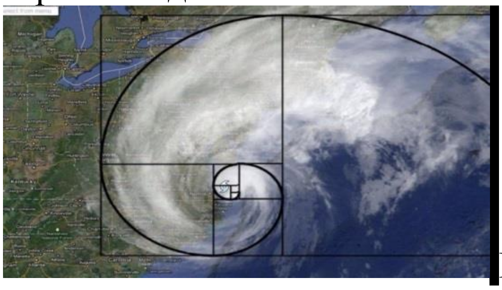


Рис. 15**.**

Рост растений тоже происходит в соответствии с числовым рядом Фибоначчи – от ствола отходит ветка, на которой появляется лист, затем происходит длинный выброс и снова появляется листок, но он уже короче предыдущего. Затем опять выброс, но и он короче предыдущего. В этой картине, первый выброс равен 100%, второй 62%, а третий 38% (уровни Фибоначчи, используемые в торговле) и т.д. С длиной лепестков все выглядит точно так же. Если поделить ящерицу на хвост и тело, то соотношение их будет 0,62 к 0,38.

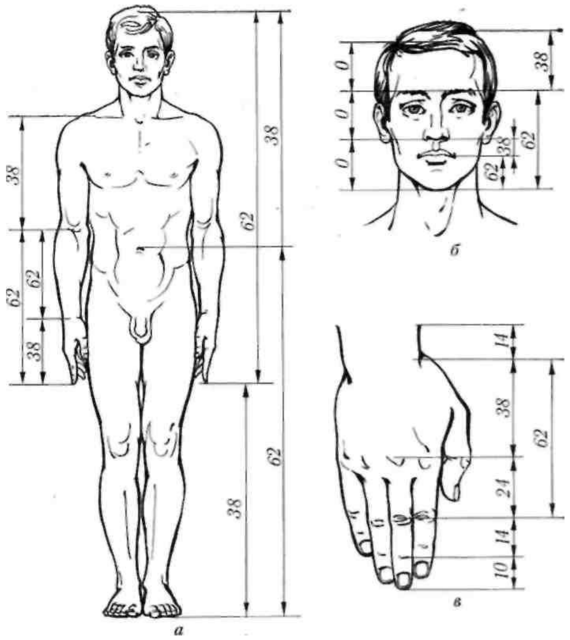
Как видно, числовой ряд Фибоначчи широко представлен в нашей жизни: в строении живых существ, сооружений, с его помощью даже описывается устройство Галактик. Все это свидетельствует об универсальности математической загадки числового ряда Фибоначчи.

Многие пытались разгадать секреты пирамиды в Гизе. В отличие от других египетских пирамид это не гробница, а вскорее неразрешимая головоломка из числовых комбинаций. Изобретательность, мастерство, время и труд архитекторов пирамиды, использованные ими при возведении вечного символа, указывают на чрезвычайную значимость и важность послания, которое они хотели передать будущим поколениям.

3. Числа Фибоначчи и человек

Около двух веков идея применения золотой пропорции в исследовании человеческого тела была предана забвению, и лишь в середине XIX века немецкий ученый Цейзинг вновь обратился к ней. Он находил, что все тело человека в целом и каждый отдельный его член связаны математически строгой системой пропорциональных отношений, среди которых золотое сечение занимает важнейшее место. Измерив тысячи человеческих тел, он установил, что золотая пропорция есть среднестатистическая величина, характерная для всех хорошо развитых тел. Он нашел, что средняя пропорция мужского тела близка к 13/8=1,625, а женского - к 8/5=1,60. Аналогичные значения получены и при анализе антропометрических данных населения СССР (1,623 для мужчин и 1,605 для женщин). Пропорции тела мужчин и женщин отклоняются в разные стороны от золотой пропорции - иррациональной предельной величины, равной 1,618., в чем выражается, очевидно, геометрическое различие в половой анатомии мужчин и женщин. Кроме этого есть и еще несколько основных золотых пропорций нашего тела:

расстояние от уровня плеча до макушки головы и размера головы	1:1.618
расстояние от кончиков пальцев до запястья и от запястья до локтя	1:1.618
расстояние от точки пупа до макушки головы и от уровня плеча до макушки головы	1:1.618
расстояние от кончика подбородка до верхней линии бровей и от верхней линии бровей до макушки	1:1.618
расстояние от кончика подбородка до кончика верхней губы и от кончика верхней губы до ноздрей	1:1.618
расстояние от кончика подбородка до верхней линии бровей и от верхней линии бровей до макушки равно	1:1.618
расстояние точки пупа до коленей и от коленей до ступней	1:1.618



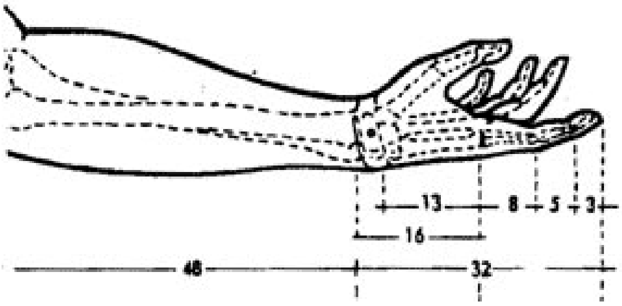


Рис. 16.

Достаточно лишь приблизить сейчас вашу ладонь к себе и внимательно посмотреть на указательный палец, и вы сразу же найдете в нем формулу золотого сечения. У человека 2 руки, пальцы на каждой руке состоят из 3 фаланг (за исключением большого пальца). На каждой руке имеется по 5 пальцев, то есть всего 10, но за исключением двух двух фаланговых больших пальцев только 8 пальцев создано по принципу золотого сечения. Тогда как все эти цифры 2, 3, 5 и 8 есть числа последовательности Фибоначчи

На человеческом лице существуют и иные воплощения правила золотого сечения:

высота лица	расстояние от кончика подбородка до центральной точки соединения губ
Длина носа	центральная точка соединения губ до основания носа
высота лица	ширина лица
ширина рта	ширина носа
расстояние между зрачками	расстояние между бровями
ширина носа	расстояние между ноздрями

Американский физик Б.Д.Уэст и доктор А.Л. Гольдбергер во время физико-анатомических исследований установили, что особенность бронхов, составляющих легкие человека, заключена в их асимметричности. Бронхи состоят из двух основных дыхательных путей, один из которых (левый) длиннее, а другой (правый) короче. Было установлено, что эта асимметричность продолжается и в ответвлениях бронхов, во всех более мелких дыхательных путях. Причем соотношение длины коротких и длинных бронхов также составляет золотое сечение и равно 1:1,618. [1]

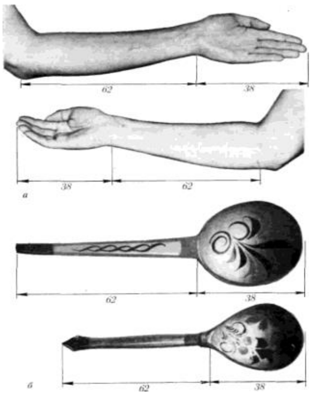
Давление крови изменяется в процессе работы сердца. Наибольшей величины оно достигает в левом желудочке сердца в момент его сжатия (систолы). В артериях во время систолы желудочков сердца кровяное давление достигает максимальной величины, равной 115-125 мм ртутного столба у молодого, здорового человека. В момент расслабления сердечной мышцы (диастола) давление уменьшается до 70-80 мм ртутного столба. Отношение максимального (систолического) к минимальному (диастолическому) давлению равно в среднем 1,6, то есть близко к золотой пропорции.

Если взять за единицу среднее давление крови в аорте, то систолическое давление крови в аорте составляет 0,382, а диастолическое - 0,618, то есть их отношение соответствует золотой пропорции: работа сердца в отношении временных циклов и изменения давления крови оптимизированы по закону золотой пропорции.

Молекула ДНК состоит из двух вертикально переплетенных между собой спиралей. Длина каждой из этих спиралей составляет 34 ангстрема, ширина 21 ангстрема. (1 ангстрем - одна стомиллионная доля сантиметра).

Во внутреннем ухе человека имеется орган Cochlea ("Улитка"), который исполняет функцию передачи звуковой вибрации. Эта костевидная структура наполнена жидкостью и также сотворена в форме улитки, содержащую в себе стабильную логарифмическую форму спирали.

4. Исследование чисел Фибоначчи



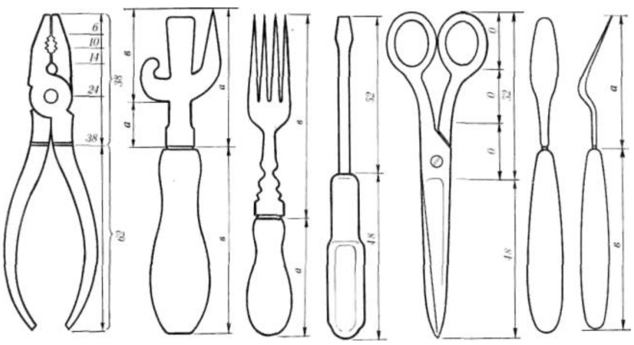


Рис. 17

Естественно предположить, что когда-то у человека не было ложки. Чтобы напиться воды из ручья, он складывал ладонь в виде черпачка и пил. Форма кисти руки в таком

[1] Согласно[18]

виде и вся рука до локтя могла послужить человеку прообразом ложки. Интересно то, что пропорции кисти с предплечьем и пропорции ложки совпадают - они составляют соотношение золотого сечения.

Измерение инструментов, которыми человек пользуется почти ежедневно, показало, что в них он продолжает формообразование по закону золотой пропорции, проявленное природой в строении руки и кисти

Изучая по данным опросов факторы, влияющие на ощущение счастья, исследователи задались вопросом о количественном соотношении счастливых и несчастливых людей. Анализ как отечественных, так и зарубежных данных показал, что численность удовлетворённых и неудовлетворённых своими обстоятельствами людей подчиняется пропорциям знаменитого «золотого сечения».

По результатам опроса оказалось, что счастливыми считают себя 63% опрошенных. Поразительная цифра, т.к золотое сечение приходится на 62%.

В строении соцветий сложноцветных растений снова проявляется закономерность Золотого сечения:

Нивяник обыкновенный имеет 34 лепестка; Ирис имеет 3 лепестка; Примула имеет 5 лепестков; Амброзия полыннолистная имеет 13 лепестков; Астра имеет 55 и 89 лепестков.

Таким образом, суммарной последовательностью Фибоначчи легко можно трактовать закономерность проявлений Золотых чисел, встречаемых в природе. Эти законы действуют в независимости от нашего знания, от чьего-то желания принимать или не принимать их.

Прямоугольники золотого сечения выглядят «пропорционально» и приятны на вид. Вещами, имеющими такую форму, оказывается удобным пользоваться. Поэтому многим «прямоугольным» предметам нашего обихода (книгам, спичечным коробкам, чемоданам и т. п.) часто придается именно такая форма. Например, большинство книг имеет форму прямоугольника с отношением сторон 1,62, а заполненная текстом часть ее страницы - форму прямоугольника с отношением сторон 1,64.

Числа Фибоначчи появляются также в вопросах, связанных с исследованием путей в различных геометрических конфигурациях.

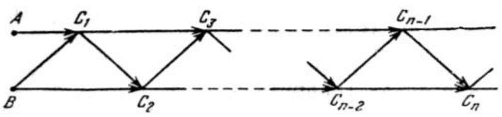


Рисунок 18

Рассмотрим, например, сеть путей, изображенную на рисунке 18 (*ориентированный граф),* и подсчитаем число путей, которыми можно, двигаясь вдоль стрелок, перейти из вершины A или B в вершину C_n.

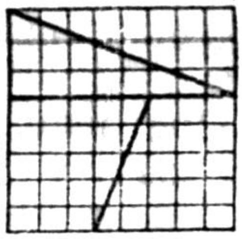
Обозначим числа таких путей соответственно через a_n и b_n. В начале движения, как из точки A, так и из точки B, в вершину C_n можно попасть двумя способами: через вершину C_{n-1} с последующим шагом вдоль наклонного ребра и через вершину C_{n-2} с последующим шагом вдоль горизонтального ребра. Значит,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

Заметим, что $a_1 = a_2, = 1$ и $b_1 = b_2 = 2$, откуда следует, что $a_n = u_n$ и $b_n = u_{n+1}$. [1]

5. Софизм: *64=65*

Закончим наше изложение небольшой геометрической шуткой: наглядно «докажем», что **64=65.** Возьмем для этого квадрат со стороной 8 и разрежем его на четыре части, как показано на рис.19. Части сложим в прямоугольник (рис. 20) со сторонами 13 и 5, т. е. с площадью, равной 65.



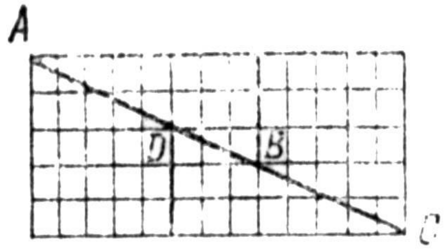
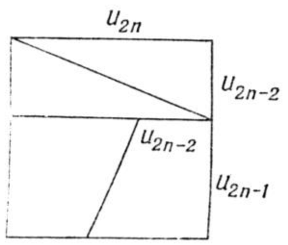


Рисунок 19. Рисунок 20

Дело в том, что точки *B, C, D, A* не лежат на одной прямой, а являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна «лишей» единице.

«Доказательство» можно проделать более наглядно, если вместо квадрата со стороной 8 взять квадрат со стороной, равной числу Фибоначчи с достаточно большим четным номером, u_{2n}. Разобьем этот квадрат на части (рис. 21) и сложим из них прямоугольник (рис. 22).



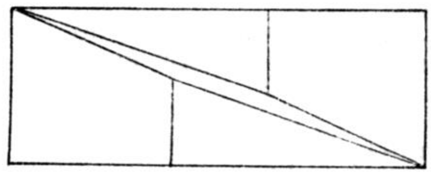


Рисунок 21 Рисунок 22

«Пустота» в виде параллелограмма, вытянутого вдоль диагонали прямоугольника имеет площадь, равную единице. Высота параллелограмма, т.е. наибольшая ширина этой щели, равна $\dfrac{1}{\sqrt{u_{2n}{}^2 + u_{2n-2}{}^2}}$.

Поэтому, если мы возьмем квадрат со стороной 21 см и «превратим» его в прямоугольник со сторонами 34 и 13 см, то наибольшая ширина щели получится $\dfrac{1}{\sqrt{21^2+8^2}}$*см*, т. е. около 0,4 мм, что почти незаметно для глаз.

[1] Согласно [4, стр. 94-102] «Числа Фибоначчи и геометрия».