

Научно-исследовательская работа

Предмет: математике

**ТРУДНЫЙ ВОПРОС: СКОЛЬКО?
(ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРУГОВ ЭЙЛЕРА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ)**

Выполнила:

Прокуронова Милена Сергеевна,

учащаяся 8 «В» класса

МОУ Лицей №11

Научный руководитель:

Саломатина Галина Александровна,

учитель математики

МОУ Лицей №11

Волгоград, 2022

Содержание

Введение	3
Глава 1. Круги Эйлера	5
1.1. Леонард Эйлер. Биография.....	5
1.2. Круги Эйлера	6
Глава 2. Круги Эйлера в задачах	8
Глава 3. Задачи, при решении которых можно применить круги Эйлера.....	12
Заключение	14
Литература.....	15

Введение

Мне в руки попала книга Мадера В.В. «Математический детектив», где автор в занимательной форме знакомит читателей с методами решения логических задач. При прочтении данной книги, меня заинтересовала одна задача.

«Ребята из нашего класса посещали три кружка: математический, физический и химический. Списки членов этих кружков хранились у Холмса. Однажды Ватсон решил организовать еще и кружок юных медиков. В этот кружок он решил пригласить только тех ребят, которые пока ни в какие кружки еще не были записаны. Чтобы узнать, сколько таких ребят, Ватсон обратился к Холмсу.

Холмс сказал, что всего в классе 36 человек, а кружки посещают: математический – 18 человек, физический 14 человек, химический – 10 человек.

Ватсон удивился: «Как же это может быть? Ведь $18+14+10=42$, а в классе только 36 человек». Холмс объяснил, что дело тут просто в том, что некоторые ребята ходят в два, а возможно, и в три кружка. Ватсон согласился и спросил: «А как же мы узнаем, сколько человек не посещают никаких кружков?» Холмс ответил: «Чтобы это узнать, нужно сначала взять списки математического и физического кружков и подсчитать, сколько ребят посещают оба кружка. Потом нужно сделать то же самое и с другими списками».

Через некоторое время Ватсон получил следующие данные: все три кружка посещают 2 человека, математический и физический – 8, математический и химический – 5, физический и химический – 3.

- Теперь, - сказал Холмс, - посмотри на картинку, которую я нарисовал. Она нам поможет ответить на вопрос, который тебя интересует. Следует заметить, что в математике рисунке подобного рода используются очень давно. Распространение этого метода во многом способствовал знаменитый математик Леонард Эйлер. Поэтому круги, изображаемые на рисунках подобного рода, часто называют кругами Эйлера».

Меня заинтересовала возможность использования кругов Эйлера для решения задач, и захотелось разобраться, что такое круги Эйлера и для каких задач можно их применить.

Цель применения кругов Эйлера как один из приемов решения задач.

Задачи:

1. Изучить теоретические основы понятий: «Круги Эйлера».
2. Научиться решать задачи вышеназванными методами.
3. Составить подборку материала для учащихся «Решение задач с помощью кругов Эйлера»

Гипотеза исследования: применение кругов Эйлера повышают результативность и наглядность при решении задач?

Предмет исследования: круги Эйлера для решения класса логических задач

Глава 1. Круги Эйлера

1.1. Леонард Эйлер. Биография

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 года в семье пастора, жившей в швейцарском городке Базеле. Рано обнаружил математические способности. 20 октября 1720 года 13-летний Леонард Эйлер стал студентом факультета искусств Базельского университета, где преподавались и математика и астрономия. Занятия по этим предметам вел прославленный математик Иоганн Бернулли. Профессор стал лично руководить самостоятельными занятиями юноши и вскоре публично признал, что от проницательности и остроты ума юного Эйлера он ожидает самых больших успехов.

Не забывал Эйлер и другие университетские курсы, поэтому и был широко образован. 8 июня 1724 года 17-летний Леонард Эйлер произнёс на латыни речь о сравнении философских воззрений Декарта и Ньютона и был удостоен учёной степени магистра. В последующие два года юный Эйлер написал несколько научных работ. Одна из них, «Диссертация по физике о звуке. Но, несмотря на положительный отзыв о работе, 19-летнего Эйлера сочли слишком юным, чтобы включить в число кандидатов на профессорскую кафедру. Поэтому братья Даниил и Николай Бернулли, сыновья Иоганна Бернулли, уехали в далёкую Россию, где как раз шла организация Академии наук. По их рекомендации через три года после открытия Петербургской академии наук получил приглашение и двадцатилетний Эйлер на должность адъюнкта по физиологии. 5 апреля 1727 года Эйлер навсегда покинул родную Швейцарию.

Эйлер отличался феноменальной работоспособностью. По отзывам современников, для него жить означало заниматься математикой. А работы у молодого профессора было много: картография, всевозможные экспертизы, консультации для кораблестроителей и артиллеристов, составление учебных руководств, проектирование пожарных насосов и т. д. За первый период пребывания в России (14 лет), он написал более 90 крупных научных работ по математике, гидравлике, архитектуре, навигации, картографии и механике. Значительная часть академических «Записок» заполнена трудами Эйлера. Он делал доклады на научных семинарах, читал публичные лекции, участвовал в выполнении различных технических заказов правительственных ведомств. Петербургская академия по достоинству оценила молодого ученого, в двадцать три года он уже профессор физики, а еще через три года Леонард Эйлер получает кафедру высшей математики. В 1730-е годы Эйлер становится известен и в Европе. Двухтомное сочинение «Механика, или наука о движении, в аналитическом изложении», изданное в 1736 году, принесло ему мировую славу. Начиная с

этого момента, теоретическая механика становится прикладной частью математики. Осенью 1740 внутренняя обстановка в России осложнилась. Это побудило Эйлера принять приглашение прусского короля, и летом 1741 он переехал в Берлин, где вскоре возглавил математический класс в Берлинской Академии наук и словесности. Годы, проведенные Эйлером в Берлине, были наиболее плодотворными в его научной деятельности. Переезд в Берлин не прервал, однако, тесных связей Эйлера с Петербургской Академией наук. Он по-прежнему регулярно посылал в Россию свои сочинения, участвовал в экспертизах различного рода, обучал посланных к нему из России учеников, подбирал ученых на замещение вакантных должностей в Академии и выполнял много других поручений. В 1762 году на русский престол вступила Екатерина II, которая хорошо понимая значение науки, как для прогресса государства, так и для собственного престижа, провела ряд важных, благоприятных для науки, преобразований в системе народного просвещения и культуры. Императрица предложила Эйлеру управление математическим классом (отделением), звание конференц-секретаря Академии.

После двадцати пяти лет проживания в Берлине, 60-летний Эйлер снова возвращается в Россию, в Петербург. Число опубликованных им работ возросло; за полтора десятка лет второго пребывания в России он продиктовал более 400 статей и 10 книг. В 1773 году по рекомендации Даниила Бернулли в Петербург приехал из Базеля ученик Бернулли, Никлаус Фусс. В последующие десять лет - до самой своей смерти - Эйлер преимущественно ему диктовал свои труды, хотя иногда пользовался «глазами старшего сына» и других своих учеников. Эйлер активно трудился до последних дней. В сентябре 1783 года 76-летний учёный стал ощущать головные боли и слабость. 7 сентября после обеда, Эйлер почувствовал себя плохо, успел произнести: «Я умираю», — и потерял сознание. Через несколько часов, так и не приходя в сознание, он скончался от кровоизлияния в мозг.

Великий ученый Леонард Эйлер занимает одно из первых мест в истории мировой науки. Полное собрание его трудов составляет 72 тома, более 850 научных работ. Этот тихий и скромный человек, полностью ослепший, много работал, совершив великое множество научных открытий.

1.2. Круги Эйлера

Круги Эйлера - геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами. Это новый тип задач, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи. Используется в математике, логике, менеджменте и других прикладных направлениях. А впервые Эйлер их

использовал в письмах к немецкой принцессе. Эйлер писал тогда, что «круги очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления».

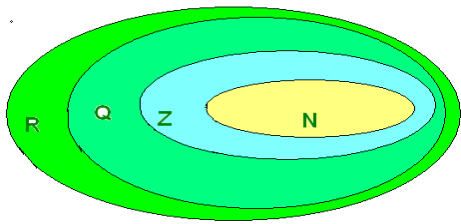
При решении задач Леонард Эйлер использовал идею изображения множеств с помощью кругов, и они получили название «круги Эйлера».

Строгого определения понятия множества не существует.

Множество - совокупность элементов, обладающих некоторым общим свойством, т. е. как единое целое (множество натуральных чисел, множество треугольников на плоскости).

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называют конечными, а остальные множества – бесконечными. Например, множество китов в океане конечно, а множество рациональных чисел бесконечно. Конечное множество может быть задано перечислением его элементов (множество учеников в данном классе задается их списком в классном журнале).

Понятие подмножества в определении кругов Эйлера – это, например, во множестве учеников класса можно выделить множество ударников, которые входят во множество всех учеников (ударники – подмножество).



Множество всех действительных чисел Эйлер изобразил с помощью этих кругов: N - множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, Q – множество рациональных чисел, R – множество всех действительных чисел.

Метод Эйлера является незаменимым при решении целого ряда задач, а также упрощает рассуждения.

Глава 2. Круги Эйлера в задачах

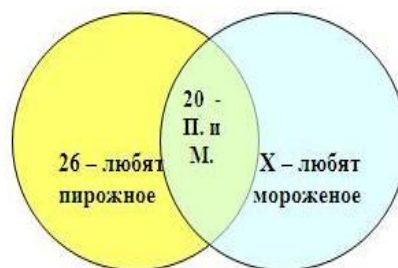
Алгоритм решения задач

1. Внимательно изучи условия задач.
2. Построй пересечения множеств.
3. Расставь исходные данные.
4. Найдите недостающие данные.
5. Проверь решение.

1. В детском саду 52 ребенка. Каждый из них любит пирожное или мороженое. Половина детей любит пирожное, а 20 человек - пирожное и мороженое. Сколько детей любит мороженое?

Решение:

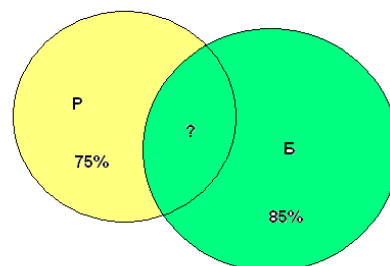
Так как 26 половина детей любит пирожные, а 20 - и пирожные, и мороженое, то исключительно пирожное любят ровно 6 человек. Всего ребят 52, из них 6 - любители только пирожных, значит, $52 - 6 = 46$ человек, которые любят мороженое.



2. Часть жителей нашего города умеет говорить только по-русски, часть - только по-башкирски и часть умеет говорить на обоих языках. По-башкирски говорят 85%, по-русски 75%. Сколько процентов жителей говорят на обоих языках?

Решение:

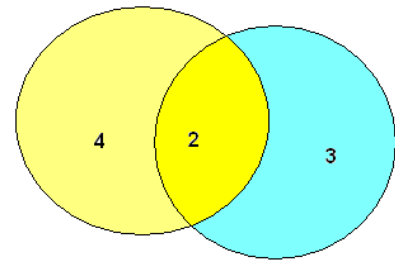
В кружке под буквой «Б» обозначим жителей, говорящих по-башкирски, под буквой «Р» - по-русски. В общей части кружков обозначим жителей, говорящих на обоих языках. Теперь от всех жителей (100%) отнимем кружок «Б» (85%), получим жителей, говорящих только по-русски (15%). А теперь от всех, говорящих по-русски (75%), отнимем эти 15%. Получим говорящих на обоих языках (60%).



3. Все мои подруги выращивают в своих квартирах какие-нибудь растения. Шестеро из них разводят кактусы, а пятеро - фиалки. И только у двоих есть и кактусы и фиалки. Угадайте, сколько у меня подруг?

Решение:

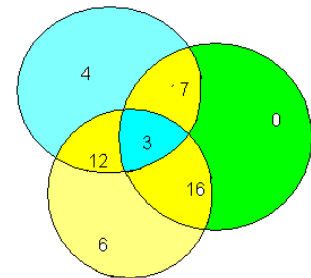
Изобразим два круга, так как у нас два вида цветов. В одном будем фиксировать владельцев кактусов, в другом — фиалок. Поскольку у некоторых подруг есть и те, и другие цветы, то круги нарисуем так, чтобы у них была общая часть. В этой общей части ставим цифру 2 так как кактусы и фиалки у двоих. В оставшейся части «кактусового» круга ставим цифру 4 ($6 - 2 = 4$). В свободной части «фиалкового» круга ставим цифру 3 ($5 - 2 = 3$). А теперь рисунок сам подсказывает, что всего у меня $4 + 2 + 3 = 9$ подруг.



4. В магазине побывало 65 человек. Известно, что они купили 35 холодильников, 36 микроволновок, 37 телевизоров. 20 из них купили и холодильник и микроволновку, 19 - и микроволновку, и телевизор, 15-холодильник и телевизор, а все три покупки совершили три человека. Был ли среди них посетитель, не купивший ничего?

Решение:

Купили только холодильники: $35 - (20 - 3) - (15 - 3) - 3 = 4$.
Купили только микроволновки: $36 - (20 - 3) - (19 - 3) - 3 = 0$.
Купили только телевизоры: $37 - (15 - 3) - (19 - 3) - 3 = 6$.
Тогда всего покупателей было: $4 + 17 + 3 + 16 + 12 + 6 = 58$.
 $65 - 58 = 7$ посетителей магазина не купили ничего.



5. На полке стояло 26 волшебных книг по заклинаниям. Из них 4 прочитал и Гарри Поттер, и Рон. Гермиона прочитала 7 книг, которых не читали ни Гарри Поттер, ни Рон, и две книги, которые читал Гарри Поттер. Всего Гарри Поттер прочитал 11 книг. Сколько книг прочитал Рон?

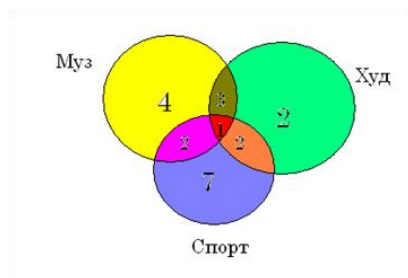
Учитывая условия задачи, чертеж будет таков:



Так как Гарри Поттер всего прочитал 11 книг, из них 4 книги читал Рон и 2 книги — Гермиона, то $11 - 4 - 2 = 5$ — книг прочитал только Гарри. Следовательно, $26 - 7 - 2 - 5 - 4 = 8$ — книг прочитал только Рон. А всего Рон прочитал 12 книг. Ответ: 12 книг прочитал Рон.

6. Из 24 учеников 5 класса музыкальную школу посещают 10 человек, художественную школу – 8 человек, спортивную школу – 12 человек, музыкальную и художественную школу– 3, художественную и спортивную школу– 2, музыкальную и спортивную школу– 2, все три школы посещает 1 человек. Сколько учеников посещают только одну школу? Сколько учащихся ни в чем себя не развивают?

В этой задаче 3 множества, из условий задачи видно, что все они пересекаются между собой. Получаем такой чертеж:



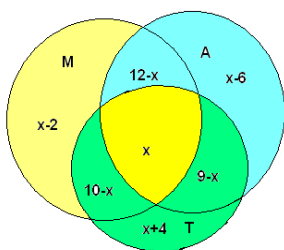
Только музыкальную школу посещают $10-3-2-1=4$ учащихся.
 Только художественную школу посещают $8-3-2-1=2$ учащихся.
 Только спортивную школу посещают $12-2-2-1=7$ учащихся.
 Только одну школу посещают $4+2+7=13$ учеников.

Ни в чем себя не развивают $24-(4+2+7+3+2+2+1)=3$ учащихся.

Ответ: 13 учеников посещают только одну школу, 3 учащихся себя не развивают.

7. В классе 30 человек. 20 из них каждый день пользуются метро, 15 — автобусом, 23 — троллейбусом, 10 — и метро, и троллейбусом, 12 — и метро, и автобусом, 9 — и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуются всеми тремя видами транспорта?

Решение: 1 способ. Для решения опять воспользуемся кругами Эйлера:



Пусть x человек пользуется всеми тремя видами транспорта. Тогда пользуются только метро и троллейбусом - $(10 - x)$ человек, только автобусом и троллейбусом - $(9 - x)$ человек, только метро и автобусом - $(12 - x)$ человек. Найдем, сколько человек пользуется одним только метро:

$$20 - (12 - x) - (10 - x) - x = x - 2$$

Аналогично получаем: $x - 6$ — только автобусом и $x + 4$ — только троллейбусом, так как всего 30 человек, составляем уравнение:

$$x + (12 - x) + (9 - x) + (10 - x) + (x + 4) + (x - 2) + (x - 6) = 30. \text{ отсюда } x = 3$$

8. Из 100 отдыхающих на турбазе «Графское»,
 30 детей - отличники учебы,
 28 - участники олимпиад,

42 - спортсмены.

8 учащихся одновременно участники олимпиад и спортсмены,

10 – участники олимпиад и отличники,

5 – спортсмены и отличники учебы,

3 – и отличники, и участники олимпиад, и спортсмены.

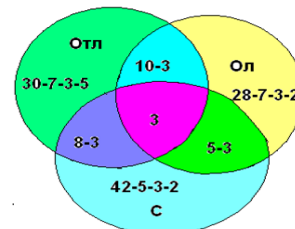
Сколько отдыхающих не относятся ни к одной из групп?

Решение:

$$20+13+30+3+5+7+2=80 \text{ (детей)}$$

$$100-80=20 \text{ (детей не входят ни в одну из групп)}$$

Ответ: 20 детей.



Глава 3. Задачи, при решении которых можно применить круги Эйлера

1. Каждый из 35 шестиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 человек берут книги в школьной библиотеке, 20 – в районной. Сколько шестиклассников:
 1. Являются читателями обеих библиотек;
 2. Не являются читателями районной библиотеки;
 3. Не являются читателями школьной библиотеки;
 4. Являются читателями только районной библиотеки;
 5. Являются читателями только школьной библиотеки?
2. Часть жителей нашего дома выписывают только газету «Комсомольская правда», часть – только газету «Известия», а часть – и ту, и другую газету. Сколько процентов жителей дома выписывают обе газеты, если на газету «Комсомольская правда» из них подписаны 85%, а на «Известия» – 75%?
3. В трёх седьмых классах 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?
4. После зимних каникул классный руководитель спросил, кто из ребят ходил в театр, кино или цирк. Оказалось, что из 36 учеников класса двое не были ни в кино, ни в театре, ни в цирке. В кино побывало 25 человек, в театре - 11, в цирке 17 человек; и в кино, и в театре - 6; и в кино и в цирке - 10; и в театре и в цирке - 4. Сколько человек побывало и в кино, и в театре, и в цирке?
5. Миша, Коля, Лева вместе прочитали 3 книги. Миша и Коля вместе прочитали 5 книг; Миша и Лева вместе – 4 книги; Коля и Лева вместе – 3 книги. Миша прочитал 8 книг; Коля – 6 книг; Лева – 5 книг. Сколько книг прочитали дети?
6. Из 110 студентов английский язык изучают 44 человека, немецкий – 50 человек, французский – 49 человек, английский и немецкий – 13, английский и французский – 14, немецкий и французский – 12, все три языка изучают 5 человек. Сколько студентов изучают только один язык? Сколько студентов не изучают ни одного языка?
7. В восьмом классе учится 40 человек. Каждый из них изучает не менее одного иностранного языка: английский, немецкий, французский. 34 человека изучают хотя

бы один из двух языков: английский, немецкий. 25 человек — хотя бы один из языков: немецкий, французский. 6 человек только немецкий. Одновременно два языка — английский и немецкий — изучают на 3 человека больше, чем французский и немецкий языки. Сколько человек изучает каждый из языков и сколько изучает одновременно каждую пару языков?

8. В областной спартакиаде участвует школьная команда из 20 человек, каждый из которых имеет юношеский спортивный разряд по одному или нескольким видам спорта: лёгкой атлетике, плаванию и гимнастике. Известно, что 12 из них имеют спортивные разряды по лёгкой атлетике, 10 – по гимнастике и 5 – по плаванию. Сколько учеников из этой команды имеют разряды по трём видам спорта, если по лёгкой атлетике и гимнастике - 4 человека, по плаванию и гимнастике - 2 человека?
9. В футбольной команде «Баймак» 30 игроков: 18 нападающих, 11 полузащитников, 17 защитников. Вратари: 3 могут быть нападающими и защитниками, 10 защитниками и полузащитниками, 6 нападающими и защитниками 1 и нападающим, и защитником, и полузащитником. Вратари не заменимы. Сколько в команде «Баймак» вратарей?
10. В магазин «Мир музыки» пришло 35 покупателей. Из них 20 человек купили новый диск певицы Максим, 11 – диск Земфиры, 10 человек не купили ни одного диска. Сколько человек купили диски и Максим, и Земфиры?

Заключение

Изображение условий задачи в виде кругов Эйлера, как правило, упрощает и облегчает путь к ее решению. Круги Эйлера - хороший, а главное удобный (графически иллюстрированный) способ решения текстовых задач. Существует множество приемов, которые используются при решении текстовых логических задач. Очень часто решение задачи помогает найти рисунок, он делает решение простым и наглядным. Задачи, решаемые с помощью кругов Эйлера, предлагаются на математических олимпиадах. Ценность использования кругов Эйлера состоит в том, что решения задач с громоздкими условиями и со многими данными становятся проще. Подобные задачи часто имеют практический характер, что немаловажно в современной жизни. Они заставляют задумываться, подходить к решению какой-либо проблемы с разных сторон, уметь выбирать из множества способов решения наиболее простой, легкий путь.

Литература

1. Академия математики «Леонард Эйлер» научно-практический журнал Математика для школьников №3 2007г., с.41-48
2. Интернет ресурсы http://logika.vobrazovanie.ru/index.php?link=kr_e.html – Учимся решать логические задачи
3. Интернет – ресурсы <http://olymp.ifmo.ru/archive/problems/inf/> – архив задач по информатике.
4. Босова Л.Л. Информатика: Рабочая тетрадь для 7 класса /Л. Л. Босова, – 2-е изд., испр. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 117 с.: ил.
5. Глейзер Г. И. История математики. М., Наука, 1982 г.