Департамент образования мэрии города Новосибирска
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение города Новосибирска «Лицей № 159»

Направление: инженерно-технологическое
Секция: математика

«Применение вписанных, описанных и вневписанных окружностей при проектировании архитектурных сооружений г. Новосибирска»

Выполнили: ***Николайчик Егор Александрович,***

Лихачев Снргей Макстмович

Учащиеся 10 «Б» специализированного класса

инженерно- технологического направления,

МБОУ «Лицей №159», Россия, г. Новосибирск

Руководитель:

Бутакова Виктория Игоревна

Учитель математики, магистр

МБОУ «Лицей №159», Россия, г. Новосибирск

г. Новосибирск, 2021 г.

Оглавление

Портфолио проекта

1. Название проекта: «Применение вписанных, описанных и вневписанных окружностей при проектировании архитектурных сооружений г. Новосибирска»
2. Фамилия, имя, отчество разработчика проекта: Лихачёв Сергей Максимович, Николайчик Егор Александрович
3. Класс: 10 «Б» специализированный класс инженерно-технологического направления
4. Название, номер учебного учреждения, где выполняется проект: МБОУ «Лицей №159»
5. Предметная область: геометрия, технология
6. Время разработки проекта: май 2020 – ноябрь 2021 гг.
7. Проблема исследования: задачи с использованием вневписанной окружности встречаются на ЕГЭ, однако, в школьном курсе математики такие задачи не изучаются даже на профильном уровне. Вписанные и описанные окружности изучаются на базовом уровне математики поверхностно.
8. Гипотеза: мы предполагаем, что при проектировании зданий, содержащих купольные конструкции, используются свойства вписанной и описанной окружностей.
9. Цель работы: изучение ключевых положений по теории вписанных, описанных, вневписанных окружностей и доказательство гипотезы исследования.
9. Задачи работы:
1. Обозначить ключевые положения теории.
2. Рассмотреть задачи ЕГЭ, ОГЭ по теме исследования.
3. Доказать основные свойства вневписанной окружности
4. Рассмотреть архитектуру города Новосибирска и выяснить при проектировании каких зданий были использованы окружности.
5. Создание творческих проектов по теме исследования.
6. Создать макет Новосибирского Государственного академического театра оперы и балета и показать, что при проектировании данного театра использовались свойства вписанной окружности в многоугольник.
7. Доказать неразрывную и очень тесную связь между такими науками как архитектура и геометрия.
8.Доказательство гипотезы исследования.

Тип работы: поисковый, исследовательский
10. Используемые технологии: мультимедиа
11. Форма продукта проекта: презентация, научно-исследовательская работа, творческие проекты, макет
12. Содержание:

Приложение А
Новосибирский государственный академический театр оперы и балета
Новосибирская Часовня Святого Николая
Новосибирский собор Троицы Живоначальной
Новосибирский собор Александра Невского
Приложение В
Приложение А
Творческие проекты по теме исследования
Макет Новосибирского Государственного академического театра оперы и балета

13. Исследование проекта: исследование способов решения геометрических задач по теме «Вписанная, описанная, вневписанная окружности», исследование свойств вписанной окружности при проектировании Новосибирского Государственного академического театра оперы и балета

Введение

Окружность — геометрическое место точек, равноудаленных от центра.

Только в Древней Греции окружность и круг получили свои названия (примерно в 340 году до нашей эры). Самая простая из всех кривых линий - окружность. Это одна из древнейших геометрических фигур. Философы древности придавали ей большое значение.

В Древней Греции круг и окружность считали венцом совершенства. В каждой своей точке окружность устроена одинаковым образом, что позволяет ей двигаться самой по себе. Это свойство окружности стало толчком к возникновению колеса, так как ось и втулка колеса должны всё время быть в соприкосновении.

Сотни лет астрономы считали, что планеты двигаются по окружностям. Это ошибочное мнение было опровергнуто лишь в XVII веке учением Коперника, Галилея, Кеплера и Ньютона.

Чтобы различить круг и окружность, достаточно рассмотреть, чем являются обе фигуры. И круг, и окружность-это бесчисленное количество точек плоскости, располагающиеся на равном расстоянии от единственной центральной точки. Но, если круг состоит и из внутреннего пространства, то у окружности его нет.

Профессия инженера очень актуальна в наше время. Мы обучаемся в 9 «Б» специализированном классе инженерно-технологического направления, на уроках геометрии мы изучали свойства вписанной и описанной окружности в многоугольник, а на спецкурсах по геометрии мы изучали свойства вневписанной окружности. Нам стало интересно, как применяются свойства окружностей при проектировании зданий, а именно архитектурных сооружений г. Новосибирска, поэтому мы выбрали данную тему.

Проблема исследования: задачи с использованием вневписанной окружности встречаются на ЕГЭ, однако, в школьном курсе математики такие задачи не изучаются. Вписанные и описанные окружности изучаются на базовом уровне математики поверхностно.

Гипотеза исследования: мы предполагаем, что при проектировании зданий, содержащих купольные конструкции, используются свойства вписанной окружности в многоугольник.

Цель работы: изучение ключевых положений по теории вписанных, описанных, вневписанных окружностей.

Задачи работы:

1. Обозначить ключевые положения теории;
2. Рассмотреть задачи ЕГЭ, ОГЭ по теме исследования;
3. Доказать основные свойства вневписанной окружности;
4. Рассмотреть архитектуру города Новосибирска и выяснить при проектировании каких зданий были использованы окружности;
5. Создание творческих проектов по теме исследования;
6. Создать макет Новосибирского Государственного академического театра оперы и балета и показать, что при проектировании данного театра использовались свойства вписанной окружности в многоугольник;
7. Доказать неразрывную и очень тесную связь между такими науками как архитектура и геометрия.

Основная часть

Вписанная окружность

Свойства вписанной окружности:

1. Вписанная в выпуклый многоугольник окружность — это окружность, которая касается всех сторон этого многоугольника, то есть каждая из сторон многоугольника является для окружности касательной.
2. В любой треугольник можно вписать окружность при том только одну.
3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.
4. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.
5. Многоугольник, в который вписана окружность, называется описанным.
6. В выпуклый многоугольник можно вписать окружность, если биссектрисы всех его внутренних углов пересекаются в одной точке.
7. Центр вписанной в многоугольник окружности — точка пересечения его биссектрис.
8. Центр вписанной окружности равноудален от сторон многоугольника. Расстояние от центра до любой стороны равно радиусу вписанной окружности (По свойству касательной, сторона описанного многоугольника перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания).
9. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противолежащих сторон равны. В частности, в трапецию можно вписать окружность, если сумма её оснований равна сумме боковых сторон.
10. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность. Около любого правильного многоугольника можно также описать окружность. Центр вписанной и описанной окружностей лежат в центре правильного многоугольника.
11. Для любого описанного многоугольника радиус вписанной окружности может быть найден по формуле $r = \frac{S}{p}$ где S — площадь многоугольника, p — его полупериметр.
12. В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равных 180.
13. Если сумма противоположных углов равна 180° то около него можно описать окружность.

Описанная окружность

Свойства описанной окружности:

1. Описанная около выпуклого многоугольника окружность — это окружность, которая проходит через все вершины многоугольника.
2. Многоугольник, около которого описана окружность, называется вписанным.
3. В выпуклый многоугольник можно вписать окружность, если все серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке.
4. Центр вписанной в многоугольник окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

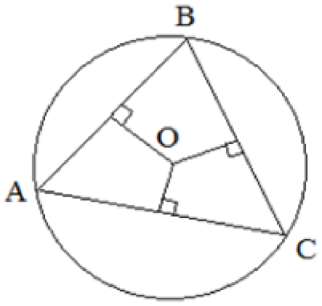


Рисунок 1

5. Центр описанной окружности равноудалён от вершин многоугольника.
6. Расстояние от центра до любой вершины многоугольника равно радиусу описанной окружности.
7. Радиус R окружности, описанной около треугольника, равен отношению произведения сторон a, b, c треугольника к его учетверенной площади:

$$R = \frac{abc}{4S}$$

8. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен отношению стороны треугольника к удвоенному синусу противолежащего угла:

$$R = \frac{AB}{2sin\angle C} = \frac{AC}{2sin\angle B} = \frac{BC}{2sin\angle A}$$

9. Вокруг четырехугольника можно описать окружность, если суммы его противоположных углов равны 180.

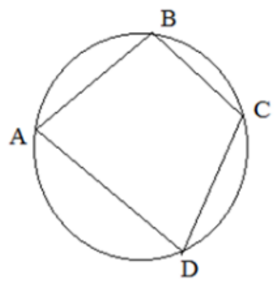


Рисунок 2

10. Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.
11. Площадь четырёхугольника, вписанного в окружность, можно вычислить по формуле Брахмагупты:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Вневписанная окружность

Свойства вневписанной окружности:

Задача №1 Центр вневписанной окружности в треугольник есть точка пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника, противолежащего той стороне треугольника, которой окружность касается, и биссектрис двух внешних углов треугольника.

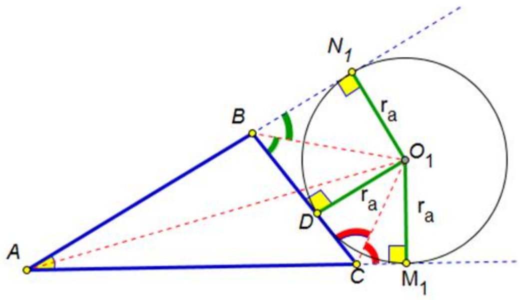


Рисунок 3

Доказательство:

Т. к. окружность касается сторон угла A, то центр окружности O1 равноудален от сторон этого угла, следовательно, он лежит на биссектрисе ∠CAB. Аналогично, точка O_1 лежит на биссектрисах $\angle BCM_1$ и $\angle CBN_1$, т. к. окружность касается прямых BA и BC, BC и CA.

Задача №2 Радиус вневписанной окружности, касающейся данной стороны треугольника, равен отношению площади треугольника к разности полупериметра и этой стороны. т.е. $r_a = \frac{S}{(p-a)}$

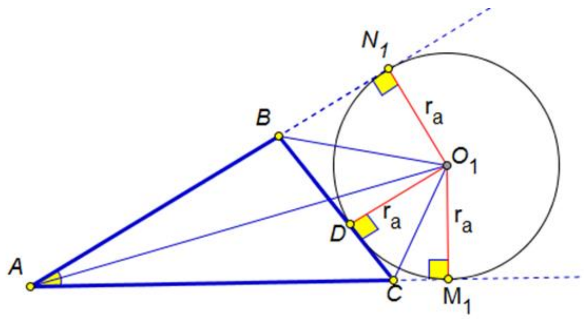


Рисунок 5

Доказательство:

Рассмотрим площадь S треугольника ABC:

$$S = S_{ABC} = S_{AO_1C} + S_{AO_1B} - S_{CO_1B} = \frac{1}{2}r_a b + \frac{1}{2}r_a c - \frac{1}{2}r_a a = \frac{r_a}{2} \cdot (b + c - a)$$

$$= r_a \cdot (p - a) \text{ то есть } r_a = \frac{S}{(p - a)}$$

Задача №3 Сумма величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, равна величине, обратной радиусу вписанной окружности, т. е.

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

Доказательство:
Выразим радиусы вневписанных и вписанной окружностей через стороны, площадь и полупериметр треугольника:

$$r=\frac{S}{p}, r_a=\frac{S}{p-a}, r_b=\frac{S}{p-b}, r_c=\frac{S}{p-c}$$

Преобразуем выражение:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$$

Задача №4

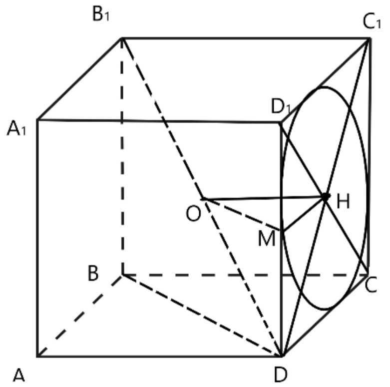


Рисунок 6

Условие: $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ – куб с ребром 12. Сфера с центром O касается всех ребер этого куба. Найдите а) положение центра O сферы;
б) радиус сферы; в) расстояния от центра сферы до вершины,грани и ребра куба.
Решение:
а) Сфера с центром в точке O касается всех ребер куба, поэтому ее пересечением с гранями куба являются равные окружности, вписанные в его грани—равные квадраты. Это означает, что центр O сферы равноудален от всех граней куба, следовательно, совпадает с его центром—точкой пересечения диагоналей куба.

б) R сферы $= 0{,}5 \cdot AD => R = 6$

в) Расстояние от центра сферы до вершины равно половине диагонали B_1D.
Проведем BD;

$$BD^2 = AB^2 + AD^2;$$

$$BD = 12\sqrt{2}, {DB_1}^2 = BD^2 + {BB_1}^2, DB_1 = 12\sqrt{3},\ OD = 0{,}5 \cdot DB_1 = 6\sqrt{3}$$

Расстояние до грани равно радиусу сферы=>$OH = 6$, H- центр окружности, вписанной в боковую грань кубаBB_1C_1C, являющейся квадратом=> радиус окружности равен половине грани куба равен 6.
Расстояние до ребра=OM. $\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{MH}^2$ $OM = 6\sqrt{2}$

Ответ: Пересечение диагоналей куба, $6\sqrt{3}$, 6, $6\sqrt{2}$.

Задача №5

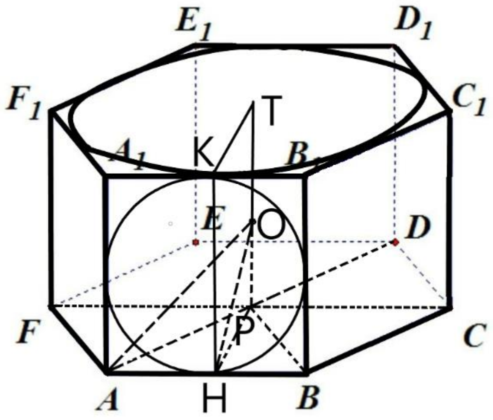


Рисунок 8

Условие:

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$-правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 16. Сфера с центром O касается всех ребер данной призмы. Найдите: а) Радиус сферы; б) расстояния от центра сферы до вершин, граней и ребер призмы.

Решение:

TO=OP $= \frac{16}{2} = 8$(т.к. O лежит на центре серединного перпендикуляра призмы)

PH-высота в правильном треугольнике APB

$$PH=\sqrt{AP^2 - AH^2}=\sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3}$$

OH- радиус сферы

Рассмотрим треугольник OPH

$$OH=\sqrt{OP^2 + PH^2} = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16 = \text{r сферы}$$

Расстояние до грани это PH, так как P это проекция точки O$\Rightarrow$ PH=$8\sqrt{3}$

(расстояние от центра сферы до грани)

Рассмотрим треугольник AOP

$$OA=\sqrt{OP^2 + AP^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} =$$

$$8\sqrt{5}\text{(расстояние от центра сферы до вершины)}$$

Ответ: расстояние от центра сферы до ребра=16, расстояние от центра сферы до грани=$8\sqrt{3}$, радиус сферы= 16.

Задача №6

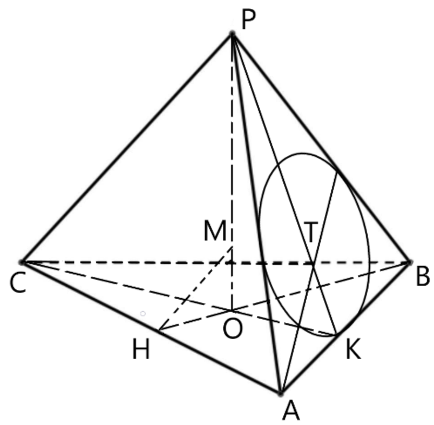


Рисунок 9

Условие:

Сфера касается всех ребер правильного тетраэдра с ребром 8. Найдите а) расстояние от центра этой сферы до вершины, грани и ребра тетраэдра; радиус сферы.

Решение:

Точка М-пересечение медиан в треугольнике=3:1=> PM=$\frac{3}{4}PO,\ OM=\frac{1}{4}PO$

BH=CK(медианы в правильном треугольнике равны), точка М- центр сферы

PM= R-радиус описанной сферы, OM=r-радиус вписанной сферы

BH-медиана, высота, биссектриса (т.к. находится в правильном треугольнике)

$$a^2+b^2=c^2,\ BA^2-HA^2=BH^2, 8^2-(\frac{8}{2})^2=BH^2$$

$$BH^2\text{=64-16=48, BH=}4\sqrt{3}$$

$$BO=\frac{2}{3}*4\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$PB^2-OB^2=OP^2, OP=\frac{8\sqrt{6}}{3}\Rightarrow MP=2\sqrt{6}\Rightarrow OM=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$OH^2+OM^2=MH^2,\ \text{MH=}2\sqrt{2}$$

а) расстояние от центра сферы до вершины(MP=$2\sqrt{6}$)

Расстояние от центра сферы до грани (OM=$\frac{2\sqrt{6}}{3}$)

Расстояние от центра сферы до ребра(MH=$2\sqrt{2}$)

б) Так как сфера касается всех ребер тетраэдра, то радиус равен расстоянию от центра сферы до ребра(MH=$2\sqrt{2}$)

Заключение

Искусство решать геометрические задачи
чем-то напоминает трюки иллюзионистов – иногда,
даже зная решение задачи, трудно понять,
как можно было до него додуматься.
И.Д.Новиков

В ходе реализации проекта нам удалось проанализировать архитектурные сооружения г. Новосибирска. Анализируя технический паспорт зданий (вид сверху), мы выяснили, что везде используются различные геометрические фигуры, а именно – окружности различных видов. При рассмотрении куполов разных видов на технических паспортах мы заметили, что окружность – проекция полусферы на плоскость основания, а, следовательно, при проектировании куполов разных видов архитекторами использовались свойства вписанной, описанной и вневписанной окружностей, что еще раз подтвердило нашу гипотезу исследования о том, что между геометрией и архитектурой существует неразрывная связь. Также нами доказаны основные свойства вневписанной окружности и созданы творческие работы по теме исследования, создан макет Новосибирского Государственного академического Театра Оперы и Балета, при проектировании которого были использованы свойства вписанной окружности в многоугольник.

Приложение А
Архитектурные сооружения г. Новосибирска

Рассмотрим здания г. Новосибирска, при проектировании которых были использованы окружности разных видов. Вид сверху данных зданий позволяет увидеть окружность в основании купола – это проекция полусферы на плоскость основания.

1. Новосибирский государственный академический театр оперы и балета

Основан в 1945 году. Является одним из ведущих театров России. На техническом плане здания мы видим концентрические окружности. Также мы видим касающиеся полуокружности, диаметры которых лежат на одной из сторон прямоугольника. При проектировании здания Оперного театра использовался принцип золотого сечения. Купол свободно лежит на круговой рандбалке, связывающей внутренние стойки радиально расположенных рам кулуаров, окружающих купол; на протяжении 30 метров в него врезается сценическая коробка.

Фотография 1

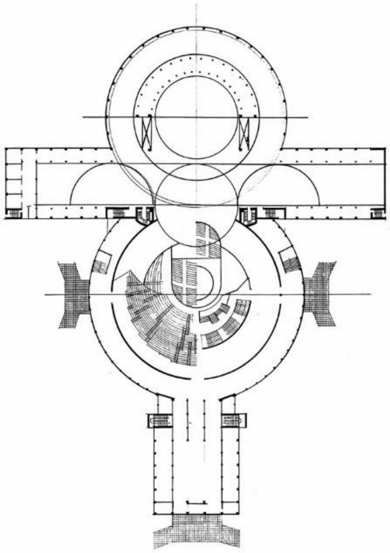


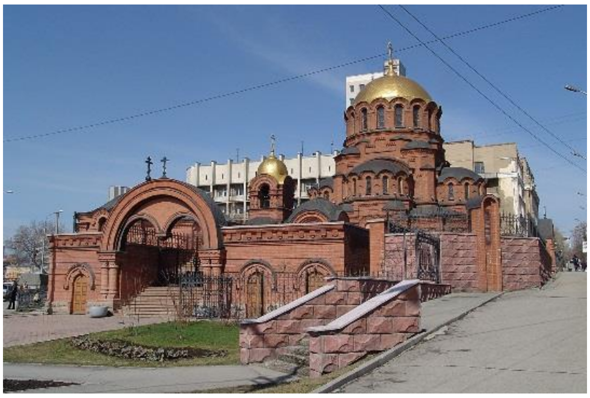
Рисунок 12

2. Железнодорожный вокзал «Новосибирск-Главный»

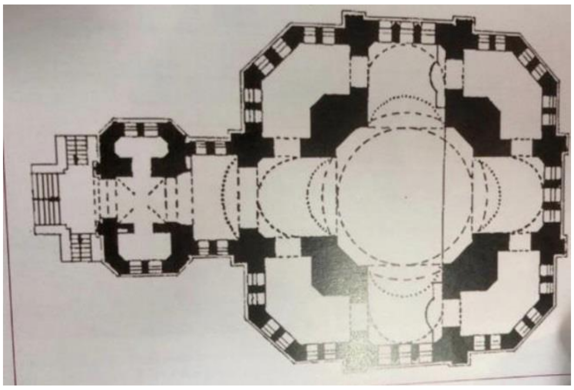
Фотография 3

В арке вокзала используется окружность, описанная около треугольника.

3. Новосибирский собор Александра Невского



Фотография 4



Фотография 5

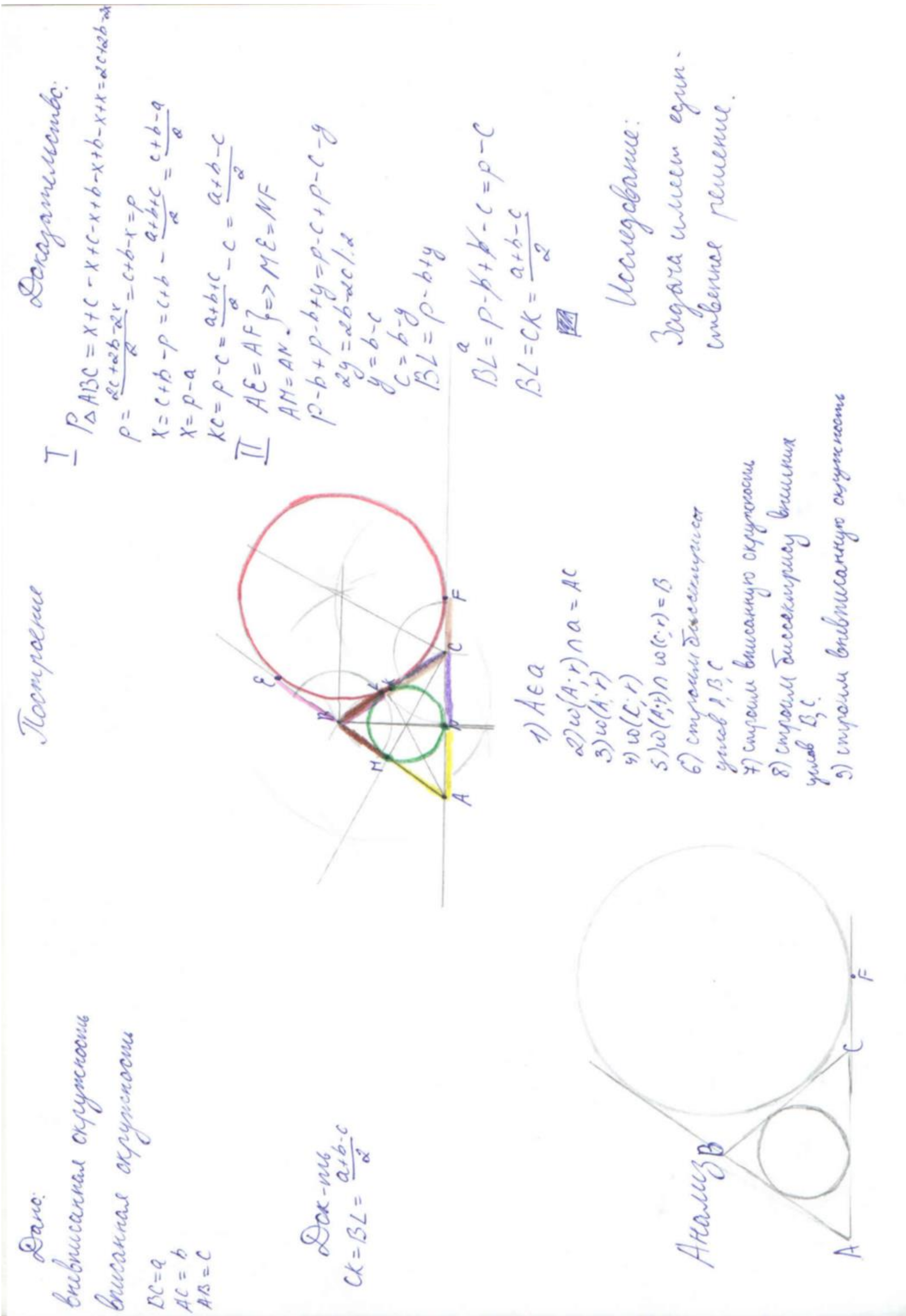
Одним из первых каменных архитектурных сооружений Новосибирска является собор Александра Невского, построенный в конце XIX века в византийском стиле. Его гармоничное и пропорциональное строение напоминает петербургские храмы того периода. *При проектировании купола собора использовалась вписанная окружность в квадрат, а также описанная окружность около того же квадрата. На данной иллюстрации видны конструкции купола, которые напоминают полусферу. Проекцией данной полусферы на плоскость основания в виде правильного восьмиугольника является окружность, вписанная в данный многоугольник.*

4. Бугринский мост

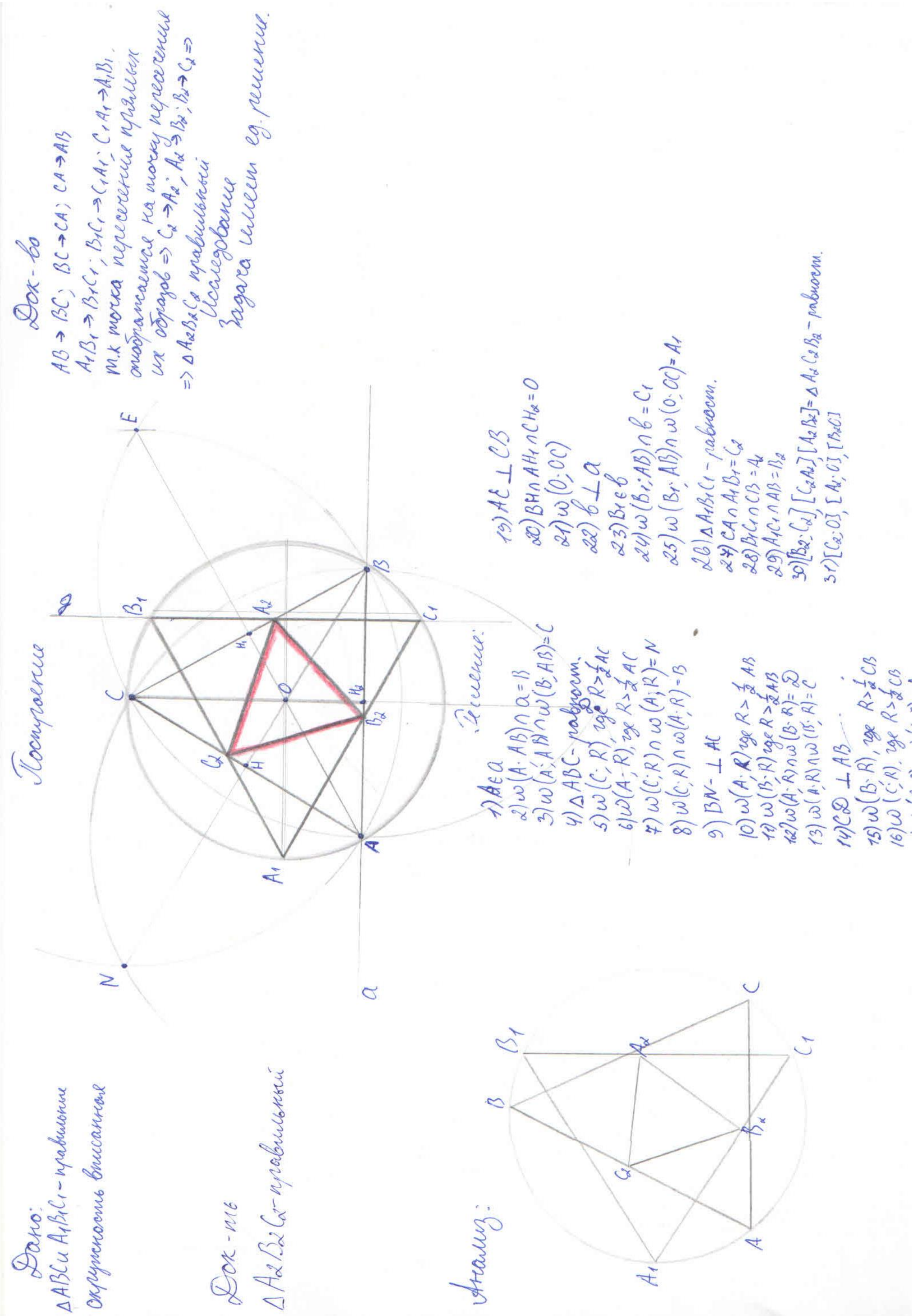
Фотография 7

При проектировании Бугринского моста использовалась окружность, описанная около треугольника.

Приложение В
Творческие проекты по теме исследования



Приложение 1



Приложение 2