Департамент образования мэрии города Новосибирска

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение города Новосибирска «Лицей № 159»

«О движении в математике»

Выполнил: **Дьячук Савелий**

Учащийся 10 «Б» специализированного класса инженерно- технологического направления,

МБОУ «Лицей №159», Россия, г. Новосибирск

Руководитель:

Бутакова Виктория Игоревна

Учитель математики, магистр

МБОУ «Лицей №159», Россия, г. Новосибирск

г. Новосибирск, 2022

Портфолио проекта

1. Название проекта: «О движении в математике»

2. Фамилия, имя, отчество разработчика проекта: Дьячук Савелий Евгеньевич

3. Класс: 10 «Б» специализированный класс инженерно-технологического направления

4. Название, номер учебного учреждения, где выполняется проект: МБОУ «Лицей № 159»

5. Предметная область: математика

6. Время разработки проекта: май 2021 –январь2022

7. Проблема: многие задачи на движение, а также задачи, содержащие различные преобразования пространства, сложно решить аналитическим путем. «Преобразования пространства» – тема, которая вызывает некоторые затруднения

8. Актуальность исследования: данная тема очень актуальна, так как на профильном экзамене по математике и на различных олимпиадах такие задачи встречаются очень часто, а вот тема «Преобразования пространства» изучается достаточно мало в школьном курсе математики, поэтому данная тема вызывает определенные затруднения у учащихся.

9. Цель работы: решение задач повышенной сложности на движение и создание 3D моделей, которые получаются вращением и движением параболы.

10. Объект исследования: процесс движения в математике.

11. Предмет исследования: свойства движения, оптическое свойство параболы, кривые второго порядка и поверхности второго порядка.

12. Задачи работы:

1. Изучить научную литературу по данной проблеме;

2. Систематизировать виды движений в пространстве;

3. Рассмотреть задачи профильного уровня математики из ЕГЭ, а также олимпиадные задачи по теме исследования;

3. Создать и разработать модели кривых второго порядка, получаемых движением параболы;

4. Объяснить с точки зрения физики и математики принцип работы оптического свойства параболы на созданных 3D моделях (математические чипсы, параболическая тарелка).

5. Доказать тот факт, что движение объектов, основанное на математических законах и принципах, применяется в технике, инженерном проектировании, физике, астрономии.

6. Доказать неразрывную и очень тесную связь между такими смежными науками как геометрия, проектирование, физика и астрономия.

13. Тип работы: поисковый, исследовательский

14. Используемые технологии: мультимедиа, 3D моделирование\печать

15. Форма продукта проекта: презентация, научно-исследовательская работа, 3D модели

16. Исследование проекта: созданные на 3D принтере математические модели, показывают и доказывают принцип работы оптического свойство параболы на практике.

17. Область применения результата проекта: математика и смежные с ней науки, такие как: инженерное проектирование, техника, физика, астрономия.

Введение

Движение – это преобразования фигур, при котором сохраняются расстояния между точками. Если две фигуры точно совместить друг с другом посредством движения, то эти фигуры одинаковы, равны. Вот например, доказывая равенство углов при основании равнобедренного треугольника, Фалес воспользовался ***осевой симметрией***: две половинки равнобедренного треугольника он совместил перегибанием чертежа по биссектрисе угла при вершине. Тем же способом Фалес доказал, что диаметр делит круг пополам.

Актуальность исследования: задачи на движение, а также задачи, содержащие различные преобразования пространства, достаточно мало изучаются в школьном курсе математики, даже на профильном уровне, однако задачи таких видов ежегодно содержатся в заданиях ОГЭ и ЕГЭ. Таким образом, выбранная тема актуальна и перспективна. Тем важнее данное исследование.

Проблема: многие задачи на движение, а также задачи, содержащие различные преобразования пространства, сложно решить аналитическим путем. Как мы можем показать наглядность движения? Какие модели мы можем сделать, показывающие ряд движений и определяющие основные свойства математических функций, их графиков?

Гипотеза: математические модели, созданные на 3D принтере, показывают, как работает оптическое свойство параболы на практике.

Цель: решение задач повышенной сложности на движение и создание 3D моделей, которые получаются вращением и движением параболы.

Объект исследования: процесс движения в математике.

Предмет исследования: свойства движения, оптическое свойство параболы, кривые второго порядка и поверхности второго порядка.

Задачи:

- изучить научную литературу по данной проблеме;
- систематизировать виды движений в пространстве;
- рассмотреть задачи профильного уровня математики из ЕГЭ, а также олимпиадные задачи по теме исследования;
- создать и разработать модели кривых второго порядка, получаемых движением параболы;
- объяснить с точки зрения физики и математики принцип работы оптического свойства параболы на созданных 3D моделях (математические чипсы, параболическая тарелка);
- доказать тот факт, что движение объектов, основанное на математических законах и принципах, применяется в технике, инженерном проектировании, физике, астрономии;
- доказать неразрывную и очень тесную связь между такими смежными науками как геометрия, проектирование, физика и астрономия.

Оглавление

Вывод формул поворота вокруг осей координат

Координаты точки при повороте относительно одной из осей Ox/Oy/Oz можно вычислить по следующей формуле:

Поворот относительно Ox:

$x_1 = x; y_1 = y\cos\alpha - z\sin\alpha; z_1 = y sin\,\alpha + z\,cos\,\alpha$

Поворот относительно Oy:

$x_1 = x\cos\alpha - z\sin\alpha; \; y_1 = y; z_1 = x\,sin\,\alpha + z\,cos\,\alpha$

Поворот относительно Oz:

$x_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha; \; y_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha; z_1 = z$

Где $x_1/\,y_1/\,z_1$ – координаты образов движимых точек, α – угол поворота,

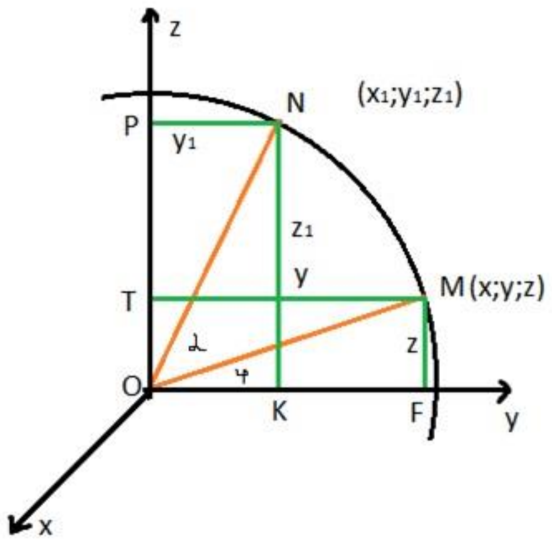
(x, y, z) – координаты движимой точки (прообраза)

Докажем формулу для поворота относительно оси Ox: $\sin\varphi = \frac{z}{R}$, $R = \frac{z}{\sin\varphi}$, $\cos\varphi = \frac{y}{R}$, $R = \frac{y}{\cos\varphi}$, $y_1 = \cos(\alpha + \varphi) \cdot R = R\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha \cdot \sin\varphi \cdot R$

Подставим вместо $R = \frac{z}{\sin\varphi}$, $R = \frac{y}{\cos\varphi}$ и получим:

$y_1 = y\cos\alpha - y\sin\alpha$, $\quad z_1 = \sin(\alpha + \varphi) \cdot R = R\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot R$

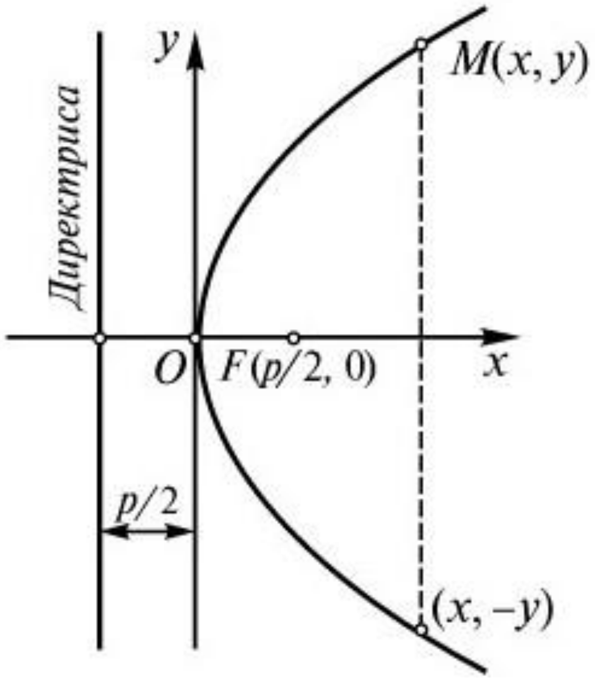
Подставим вместо $R = \frac{z}{\sin\varphi}$, $R = \frac{y}{\cos\varphi}$ и получим: $z_1 = y\sin\alpha + \cos\alpha \cdot z$



Вращение относительно других осей координат доказывается аналогично.

Движение параболы и оптическое свойство параболы. Параболическая тарелка

Парабола — это геометрическое место точек, равноудалённых от прямой (называемой директрисой) и от не лежащей на директрисе точки (называемой фокусом).



Оптическое свойство параболы: если в фокусе параболы поместить точечный источник света (лампочку) и включить его, то лучи, отразившись от параболы, пойдут параллельно оси симметрии параболы, причём передний фронт будет перпендикулярен оси.

Верно и обратное — если на параболу падает поток лучей, параллельных оси симметрии, то, отразившись от параболы, лучи придут в фокус; причём придут одновременно, если передний фронт потока лучей перпендикулярен оси.

Другими словами, оптическое свойство параболы:

- лучи, вышедшие из фокуса параболы, отразившись от неё, пойдут параллельно оси симметрии;
- лучи, пришедшие параллельно оси симметрии параболы, отразившись от неё, придут в фокус.

При вращении параболы вокруг её оси симметрии получается параболоид вращения — поверхность второго порядка.

При любом сечении параболоида плоскостями, проходящими через ось симметрии, получаются равные параболы с общим фокусом, поэтому параболоид тоже обладает оптическим свойством. Если поместить излучатель в фокус, то лучи, отразившись от поверхности, пойдут параллельно оси вращения. А если на параболоид падают лучи, параллельные его оси, то после отражения все они собираются в фокусе.

Оптическое свойство — принципиальная основа параболических антенн. Антенны могут вращаться, пример — параболические антенны в аэропортах, по форме являющиеся «ломтиками» огромных параболоидов; они и передают, и принимают сигнал. Антенны могут быть неподвижными. К последнему типу относятся бытовые спутниковые телевизионные антенны («тарелки»): их нацеливают на спутник-ретранслятор, находящийся высоко над Землёй на геостационарной орбите, после чего их положение фиксируется. Поскольку спутник находится далеко от поверхности, приходящие от него лучи в точке приёма антенной можно считать параллельными. В фокусе спутниковой антенны находится приёмник, от которого сигнал по кабелю отправляется к телевизору.

Эта же идея применяется при создании прожекторов железнодорожных локомотивов, фар автомобилей, её можно использовать даже для приготовления еды в полевых условиях.

Оптическое свойство параболы «знает» и мир живой природы. Например, некоторые северные цветы, живущие в условиях короткого лета и недостатка солнечных лучей, раскрывают лепестки в форме параболоида, чтобы «сердцу» цветка было теплее.

Параболоид — тип поверхности второго порядка в трёхмерном евклидовом пространстве

Параболоид может быть охарактеризован как незамкнутая нецентральная (то есть не имеющая центра симметрии) поверхность второго порядка.

Канонические уравнения параболоида в декартовых координатах:

1. $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ $(p > 0, q > 0)$ – эллиптический параболоид
2. $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$ $(p > 0, q > 0)$ - гиперболический параболоид

Сечения параболоида вертикальными (параллельными оси OZ) плоскостями произвольного положения — параболы.

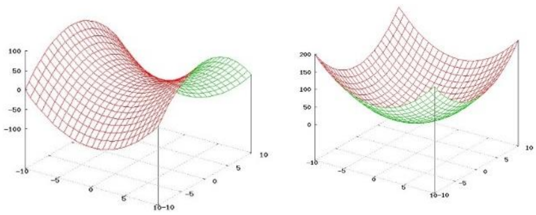
Сечения параболоида горизонтальными плоскостями x и y, для параболоида вращения эти пересечения — окружности, когда такое пересечение существует.

Пересечения для гиперболического параболоида — гиперболы.

В частных случаях пересечения, сечением может оказаться прямая или пара пересекающихся прямых или вырождаться в одну точку (для эллиптического параболоида).

Эллиптический параболоид можно описать как семейство параллельных парабол с ветвями, направленными вверх, вершины которых описывают параболу, с ветвями, также направленными вверх (см. рисунок).

.

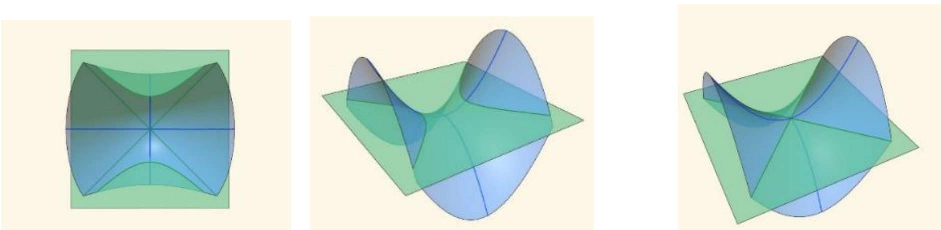


Гиперболический параболоид может быть образован движением параболы, ветви которой направлены вниз, по параболе, ветви которой направлены вверх.

Математические чипсы

Упакованные в цилиндрические тубусы чипсы, чтобы они меньше крошились, запекают на жарочных листах, придающих плоским заготовкам форму гиперболического параболоида — поверхности второго порядка. Гиперболический параболоид изогнут, похож на седло, но при этом является линейчатой поверхностью! По определению, линейчатая поверхность может быть образована непрерывным движением прямой линии, называемой образующей.

Через каждую точку гиперболического параболоида, так же как и однополостного гиперболоида, проходят две прямые.



Получение гиперболического прабалоида путем движением одной параболы по другой параболе. Три сечения гиперболического парабалоида

Гиперболический параболоид — поверхность, напоминающая седло. Она образуется при таком движении параболы с ветвями вниз, что её вершина скользит по другой, неподвижной параболе с ветвями вверх. Плоскости парабол в каждый момент времени перпендикулярны, оси параллельны.

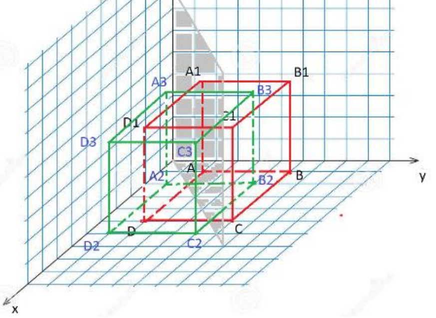
Задачи повышенной сложности по теме исследования

Задача 1. (Симметрия относительно плоскости)

Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так расположен относительно прямоугольной системы координат Oxyz, что $A(\mathbf{1};\mathbf{2};\mathbf{0})$, $\boldsymbol{B}\ (\mathbf{1};\mathbf{6};\mathbf{0})$, $\boldsymbol{C}(\mathbf{5};\mathbf{6};\mathbf{0})$. ***Найти координаты вершин куба, симметричного данному относительно плоскости $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$.***

Найдем координаты точки $D(5;2;0)$. Найдем длину ребра куба $6-2=4$. Тогда найдем координаты точек $A_1(1;2;\pm4), B_1(1;6;\pm4), C_1(5;6;\pm4), D_1(5;2;\pm4)$. Построим куб. Построим плоскость: $C=0$ и $D=0$, значит плоскость проходит через ось Oz, а на плоскости XOY в пересечении с данной плоскостью и плоскости XOY прямая $x=y$, построим ее и соответственно плоскость $x+y=0$(диагональное сечение). Диагональ куба, вершина которого лежит в начале координат, а вторая вершина лежит на плоскости Oz, а третья на плоскости Oy принадлежит плоскости $x-y=0$. Тогда точка пересечения смещается на 1 единицу по оси Ox и будет иметь координаты $K\ (2;2;0)$,а другая $T\ (5;5;0)$. Так как плоскость $x-y=0$ – диагональное сечение, то при симметрии относительно данной плоскости, точки меняют значения абсцисс на значение ординат, а значение ординат на значение абсцисс. Тогда координаты точек принимают соответствующий вид: $A_2(2;1;0)$, $B_2(6;1;0), C_2(6;5;0), D_2(2;5;0), A_3(2;1;\pm4), B_3(6;1;\pm4)$,

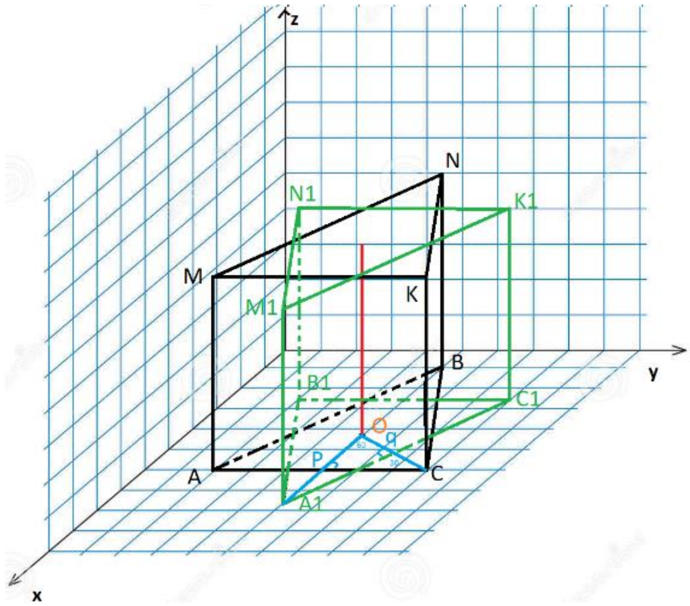
$C_3(6;5;\ \pm4), D_3(2;5;\ \pm4)$



Задача 2. (Поворот)

Правильную треугольную призму ABCMNK $\boldsymbol{A(6;2;0)}$ $\boldsymbol{B(1;5;0)}$ $\boldsymbol{C(6;8;0)}$ $\boldsymbol{M(6;2;5)}$ $\boldsymbol{N(1;5;5)}$ $\boldsymbol{K(6;8;5)}$ повернули на 60°. Постройте образ призмы и найдите координаты вершин.

Пусть точка O – центроид треугольника ABC, а точка Q - точка пересечения A_1C_1 и OC. Найдем координаты точки $O(4\frac{2}{3};5;0)$. Опустим из точки O перпендикуляр OP прямой AC. OQ ⊥ A_1C_1, следовательно AB ∥ A_1C_1 . Аналогично AC ∥ B_1C_1 и CB ∥ A_1B_1 . Тогда найдем координату точки $A_1(7\frac{2}{3};5;0)$ (BO = OA_1, так как поворот – движение), аналогично $C_1(2\frac{2}{3};2;0), B_1(2\frac{2}{3};8;0), M_1(7\frac{2}{3};5;5), K_1(2\frac{2}{3};2;5), N_1(2\frac{2}{3};2;4)$.



Ответ:

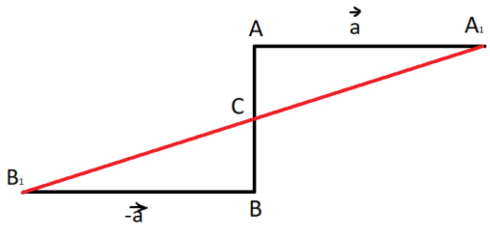
$C_1(2\frac{2}{3};2;0), B_1(2\frac{2}{3};8;0), M_1(7\frac{2}{3};5;5), K_1(2\frac{2}{3};2;5), N_1(2\frac{2}{3};2;4)$.

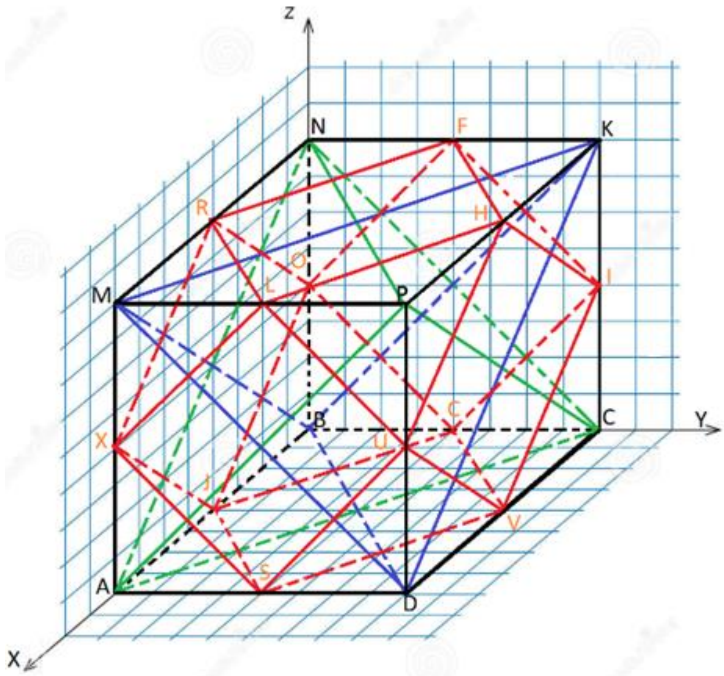
Задача 3. (параллельный перенос)

Даны два правильных тетраэдра с ребрами длины $\sqrt{2}$, переводящихся один в другой при центральной симметрии. Пусть α – множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объем фигуры α.

Докажем, что перенос одного тетраэдра на вектор $\vec{a}$, а другого на вектор $-\vec{a}$ не изменят α: пусть AB – отрезок, соединяющий вершины разных тетраэдров, а точка C – середина AB, точки A_1 и B_1 – образы точек A и B соответственно. $\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + \vec{a} - \vec{a} = 0$ Значит C – середина отрезка A_1B_1. (рис 1)

Тетраэдр можно вписать в куб с ребром 1. (Так как ребро тетраэдра будет являться диагональю стороны куба, то по теореме Пифагора сторона куба равна $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}$) Параллельно перенесем оба тетраэдра так, что они будут вписаны в куб с ребром 1. (рис 2) Начертим искомую фигуру (выделена красным) – кубооктаэдр и найдем ее объем. Объем куба равен 1. Из объема куба вычтем 8 объемов прямоугольных тетраэдров – это и будет искомый объем кубооктаэдра. Найдем объем тетраэдра: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{48}$. Соответственно объем кубооктаэдра равен $1 - \frac{1}{48}\cdot 8 = \frac{5}{6}$. Ответ: $V = \frac{5}{6}$





Заключение

В ходе выполнения работы, я убедился в том, что движение кривых второго порядка образует поверхности второго порядка.

В моей работе рассмотрены задачи повышенной сложности по теме исследования. Созданные на 3D принтере математические модели - параболическая тарелка и математические чипсы получены путем движения кривых второго порядка и образуют поверхности второго порядка. Также хотелось бы отметить, что параболическая тарелка показывает принцип работы оптического свойства параболы, которое применяется при изготовлении прожекторов, зеркальных телескопов, теле- и радио антенн.

Таким образом, моя гипотеза подтвердилась, цели и задачи работы выполнены.

Список использованной литературы

1. Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич «Геометрия», 11 класс
2. https://problems.ru
3. Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин «Математическая составляющая»
4. Е.В.Потоскуев «Математика, профильный уровень»
5. И.Ф.Шарыгин, В.И.Голубев «Факультативный курс по математике»