Департамент образования мэрии города Новосибирска

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение города Новосибирска «Лицей №159»

«Альтернативные способы решения задач на построение с помощью циркуля и линейки. Создание 3D игр на разрезание для 6-9 классов»

Автор: Гнатко Илья Витальевич

МБОУ «Лицей №159»,

Ул. Дуси Ковальчук 270/2

10 класс, Заельцовский район

г. Новосибирск

Руководитель проекта:

Бутакова Виктория Игоревна

г. Новосибирск, 2021

Портфолио проекта

1. Название проекта - «Альтернативные способы решения задач на построение с помощью циркуля и линейки. Создание 3D игр на разрезание для 6-9 классов»

2. Фамилия, имя, отчество разработчиков проекта –Гнатко Илья Витальевич

3. Класс – 10 «Б» специализированный класс инженерно-технологического направления.

4. Название, номер учебного учреждения, где выполнялся проект -

МБОУ «Лицей №159» города Новосибирска

5. Предметная область -геометрия

6. Время разработки проекта – сентябрь 2021г. - ноябрь 2021г.

7.Актуальность: геометрические задачи на построение являются настолько существенным фактором математического образования, что на преподавание этого раздела в средней школе должно быть обращено серьезное внимание. Изучение методов геометрических построений должно усилить творческие возможности учащихся, увеличить выбор приемов решения, правильно организовать процесс решения задачи.

8. Проблема: в программе школьного курса геометрии рассматриваются наиболее простые задачи на построение, тогда как на олимпиадах часто встречаются задачи высокого уровня сложности.

9. Цели исследования:

1. Выяснить, какие существуют методы решения задач на построение;
2. Проанализировать метод вспомогательной фигуры или теоремы, методы построения одной линейкой, одним циркулем, а также наиболее подробно рассмотреть алгебраический метод решения задач на построение.
3. Рассмотреть решение задач с использованием разных методов;
4. Создание творческих проектов по теме исследования.

10. Объект исследования – задачи на построение с помощью циркуля и линейки, а также только с помощью циркуля или только с помощью одной линейки.

11. Задачи исследования:

1. Проанализировать источники литературы;
2. Научиться решать задачи на построение различными методами;
3. Описать некоторые методы и способы решения задач на построение;
4. Показать преимущество знаний различных способов решения задач на построение.
5. Сравнить различные методы решения задач на построение и выявить из них наиболее рациональный, нестандартный, а также наиболее и наименее востребованный.
6. Провести анализ учебно-методической литературы.

12. Тип работы - поисковый

13. Используемые технологии - мультимедиа

14. Форма продукта проекта - презентация, научно-исследовательская работа, творческие проекты

15. Исследование проекта - исследование способов решения задач на построение.

Оглавление

Введение

Выбор темы «Методы решения задач на построение», как темы исследовательской работы, обусловлен тем, что в программе школьного курса геометрии рассматриваются наиболее простые задачи на построение, тогда как на олимпиадах часто встречаются задачи высокого уровня сложности. В настоящее время теория геометрических построений представляет собой обширную и глубокую развитую область математики, связанную с решением разнообразных принципиальных вопросов, уходящих в другие ветви математики.

Актуальность. Геометрические задачи на построение являются настолько существенным фактором математического образования, что на преподавание этого раздела в средней школе должно быть обращено серьезное внимание.

Задачи на построение развивают изобретательность, инициативу, конструктивные способности.

Изучение методов геометрических построений должно усилить творческие возможности учащихся, увеличить выбор приемов решения, правильно организовать процесс решения задачи.

Цели работы:

- ✓ Выяснить, какие существуют методы решения задач на построение;
- ✓ Проанализировать метод вспомогательной фигуры или теоремы, методы построения одной линейкой, одним циркулем, с помощью параллельного переноса, с использованием гомотетии и подобия, при помощи поворота, а также наиболее подробно рассмотреть алгебраический метод решения задач на построение.
- ✓ Рассмотреть решение задач с использованием разных методов;
- ✓ Создание творческих проектов по теме исследования.

Объект исследования -геометрические задачи на построение.

Предмет исследования - способы решения геометрических задач на построение.

Проблема - в школьном курсе геометрии недостаточно уделено внимания задачам на построение с помощью циркуля и линейки, метод вспомогательной фигуры или теоремы, метод построения одной линейкой решения задач на построение не рассматриваются в школьном курсе геометрии.

В соответствии с целью исследования необходимо решить следующие **задачи по данной теме:**

1. Проанализировать источники литературы;

2. Научиться решать задачи на построение различными методами;

3. Описать некоторые методы и способы решения задач на построение;

4. Показать преимущество знаний различных способов решения задач на построение;

5. Сравнить различные методы решения задач на построение и выявить из них наиболее рациональный, нестандартный, а также наиболее и наименее востребованный;

Провести анализ учебно-методической литературы.

Методы исследования:

1. Поисковый;

2. Анализ;

3. Дедуктивный метод.

Данный материал может использоваться в качестве основы для элективного курса в классах физико-математического профиля, а также при подготовке к олимпиадам.

К основным методам решения задач на построение, изучаемых в средней школе, относятся:

1) метод геометрических мест;

2) методы геометрических преобразований:

а) метод центральной симметрии;

б) метод осевой симметрии;

в) метод параллельного переноса;

г) метод поворота;

д) метод подобия;

3) алгебраический метод.

Перечисленные методы являются одним из видов применения на практике соответствующих геометрических понятий, которые составляют основу каждого из методов. Поэтому без хорошего знания этих понятий учениками не может быть никакой речи об успешном усвоении соответствующих методов. Но, с другой стороны, в силах учителя подобрать такую систему задач на построение и так построить обучение, чтобы решаемые задачи углубляли представление и увеличивали знания школьников о данном понятии, раскрывая его с разных сторон. Задачи при изучении конкретного метода должны подбираться так, чтобы в них как можно более ярко проявлялась суть изучаемого метода, особенно на первоначальном этапе его изучения. При этом если задача решается несколькими методами, то изучаемый метод должен позволять решить задачу наиболее экономно и красиво. Рассмотрим более подробно каждый метод.

1.**Построение одной линейкой**

1. Аксиома линейки. Линейка позволяет выполнить следующие геометрические построения:

· Построить отрезок, соединяющий две построенные точки;

· Построить прямую, проходящую через две построенные точки;

· Построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую любую построенную точку

2. Аксиома двусторонней линейки. Двусторонняя линейка позволяет:

· Выполнить любое из построений, перечисленных в аксиоме 1;

· В каждой из полуплоскостей, определяемых построенной прямой, построить прямую, параллельную этой прямой и проходящую от нее на расстоянии h, где h - фиксированный для данной линейки отрезок (ширина линейки);

· Если построены две точки A и B, то установить, будет ли AB больше некоторого фиксированного отрезка h (ширина линейки), и если $AB > h$, то построить две пары параллельных прямых, проходящих соответственно через точки A и B и отстоящих на расстоянии одна от другой на расстоянии h.

Справедлива теорема: *Всякая геометрическая задача на построение фигуры, состоящей из конечного числа точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если на плоскости построена окружность и отмечен ее центр (т.е. воли воспользоваться циркулем один раз)*. Это **теорема Штейнера,** иногда называют ее **теоремой Понселе-Штейнера.**

2.Построение одним циркулем

Раздел геометрии, изучающий геометрические построения одним циркулем, называют **геометрией циркуля.**

Итальянский ученый Л. Маскерони (1750-1800) и датский ученый Г. Мор (1640-1697) исследовали конструктивные возможности циркуля и доказали следующую **теорему Мора-Маскерони**:

Любая геометрическая задача на построение фигуры из конечного числа точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена при наличии только циркуля. Пояснения: 1) имеется в виду, что фигура состоит из конечного числа точек, окружностей, отрезков, лучей прямых; 2) циркулем, конечно, нельзя построить прямую, отрезок, луч, здесь имеется в виду, что циркулем можно сделать их известными (прямая известна, если известны две ее точки; отрезок известен, если известны два его конца; луч известен, если известна начальная точка и точка, через которую проходит луч).

При наличии только циркуля можно выполнить следующие построения:

1. Построить точку пересечения двух известных прямых (не строя этих прямых).

2. Построить точки пересечения построенной окружности и известной прямой (если такие точки существуют).

3. Построить точки, принадлежащие известной прямой.

4. Построить точки, заведомо не принадлежащие соединению конечного числа построенных точек, построенных окружностей и известных прямых.

Чтобы доказать выполнимость этих построений исключительно циркулем, решим предварительно следующую задачу: известны отрезки a, b и c; построить, пользуясь только циркулем, четвёртый пропорциональный отрезок, т.е. такой отрезок x, чтобы $a : b = c : x$.

3.Алгебраический метод

Алгебраический метод решения задач на построение - один из важнейших методов теории конструктивных задач. Именно с помощью этого метода решаются вопросы, связанные с разрешимостью задач тем или иным набором инструментов.

Суть метода состоит в следующем:

а) задача сводится к построению некоторого отрезка;

б) используя известные геометрические соотношения между искомыми и данными, составляют уравнение (систему уравнений), связывающее искомые и данные;

в) решая уравнение или систему уравнений, выражают формулой длину искомого отрезка через длины данных;

г) по формуле строится искомый отрезок (если это возможно);

д) с помощью найденного отрезка строится искомая фигура.

4.1. Формулы, использующиеся для построений

Подготовительную работу составляет изучение основных формул и способов построения, где также отрабатываются некоторые элементы схемы решения задач алгебраическим методом, и усваивается сама идея такого подхода к решению задач на построение.

В школьном курсе геометрии обычно рассматривают построения циркулем и линейкой отрезков, заданных следующими некоторыми простейшими формулами:

Формула №1 $x = a + b$ (рис. 1).

Формула №2 $x = a - b$ $(a > b)$ (рис. 2).

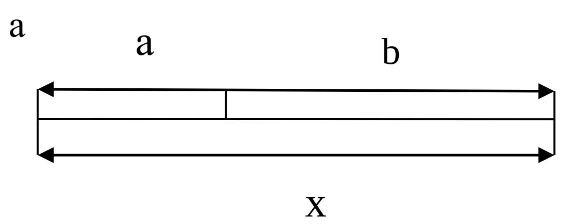


Рисунок 1

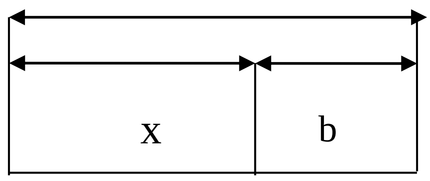
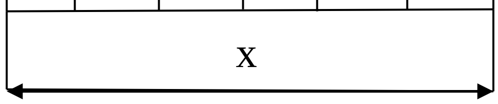


Рисунок 2

Формула №3 $x = n \cdot a$, где n — натуральное число. Сводится к построению формулой №1. На рисунке 3 построен отрезок x, такой, что $x = 6a$.



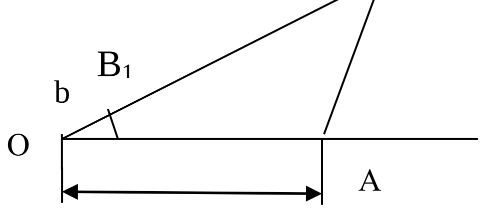


Рисунок 3 *Ри* а *ок 4*

Формула №4 $x = \frac{a}{n}$

Строим луч, выходящий из какого-либо конца O данного отрезка a под произвольным углом к нему. Откладываем на этом луче n раз произвольный отрезок b, так что OB = nb (см. рис. 4). Соединяем точку B со вторым концом A отрезка a. Через точку B_1, определяемую условием OB_1 = b, проводим прямую, параллельную AB, и отмечаем точку A_1, в которой она пересечет отрезок a.

Формула №5 $x = \frac{ab}{c}$(построение четвертого отрезка, пропорционального трем данным отрезкам).

Запишем условие в виде пропорции $c : a = b : x$. Пусть (рис. 5) OA = a, OC = c, так что члены одного из отношений отложены на одном луче, исходящем из точки O. На другом луче, исходящем из той же точки под произвольным углом, откладываем известный член другого отношения OB = b. Через точку A проводим прямую, параллельную BC, и отмечаем точку X ее пересечения с прямой OB. Отрезок OX искомый, то есть OX = x

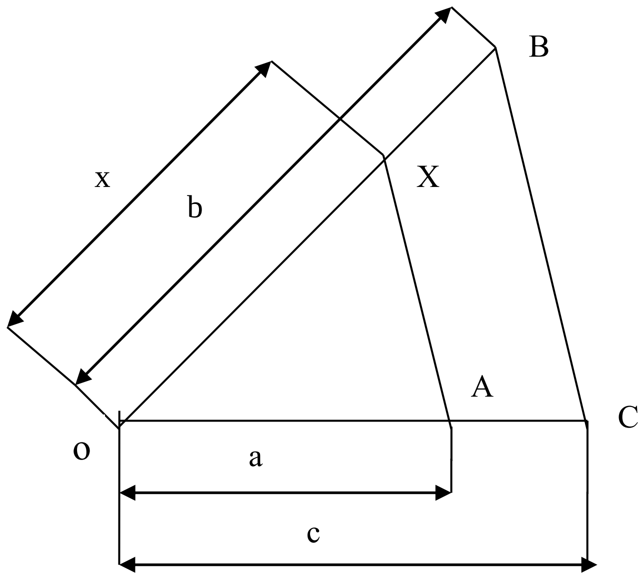


Рисунок 5

Формула №6 $x = \sqrt{ab}$ (построение среднего пропорционального двух данных отрезков).

Строим отрезки AC = a, BC = b, так что AB = a + b. На AB как на диаметре строим полуокружность (см. рис. 6). В точке C восстановим перпендикуляр к AB и отметим точку D его пересечения с окружностью. Тогда x = CD.

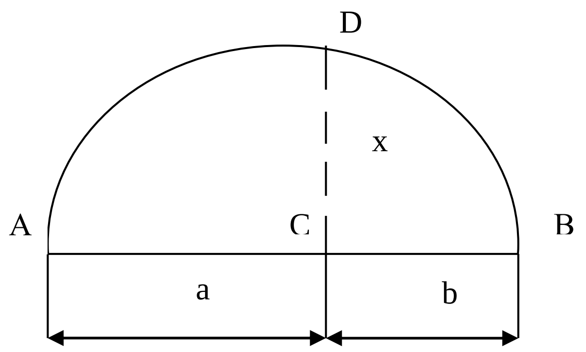


Рисунок 6

Формула №7 $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Отрезок x строится как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b.

Формула №8 $x = \sqrt{a^2 - b^2}$(a > b).

Отрезок x строится как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b.

К рассмотренным построениям можно свести построение отрезков, заданных более сложными формулами.

4.4. Критерий разрешимости задач, решенных алгебраическим методом

Анализ решенных задач позволяет сделать вывод о критерии разрешимости задач на построение алгебраическим методом.

Для того, чтобы циркулем и линейкой можно было построить отрезок, необходимо и достаточно, чтобы длину искомого отрезка можно было выразить через длины данных отрезков при помощи конечного числа основных действий.

5. Метод геометрических мест точек

5.1. Понятие о геометрическом месте точек

Геометрическая фигура может быть задана различными способами: как пересечение или соединение данных фигур, путём указания определяющего её свойства, путем указания свойства, которым обладает каждая её точка, и т. п. Так, например, один и тот же отрезок СВ можно задать:

- как пересечение лучей CM и BN;
- как диаметр одной окружности ω, перпендикулярный к данной прямой ℓ;
- как совокупность середин всех хорд окружности ω, параллельных прямой ℓ и

другими способами.

Если фигура задана путем указания свойства, которым обладают все точки этой фигуры и только они, то такую фигуру называют *геометрическим местом точек*, обладающих указанным свойством.

Таким образом, геометрическим местом точек(ГМТ) плоскости, обладающих указанным свойством, называется фигура, состоящая из всех тех точек плоскости, которые обладают этим свойством.

5.2. Обзор простейших геометрических мест

Простейшие ГМТ на плоскости рассматриваются в школьном курсе геометрии. Перечислим важнейшие из них.

1. ГМТ1. Окружность – геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой центром окружности
2. ГМТ1 (обратно). Все точки, равноудаленные от центра окружности лежат на окружности
3. ГМТ2. Все точки, равноудаленные от сторон угла, лежат на его биссектрисе.
4. ГМТ2 (обратно). Все точки, лежащие на биссектрисе равноудалены от сторон угла.
5. ГМТ3. Все точки, равноудаленные от концов отрезка, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку.
6. ГМТ3 (обратно). Все точки, лежащие на серединном перпендикуляре,

равноудалены от концов отрезка.

7. ГМТ (плоскости), равноудаленных от двух данных параллельных прямых (этой плоскости), есть прямая, параллельная данным прямым.

8. ГМТ (плоскости), равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых (этой плоскости), представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, являющиеся биссектрисами углов, образованных данными прямыми.

Методические рекомендации по методу ГМТ. Понятие ГМТ, обладающих некоторым свойством, лучше ввести на примере ГМТ, равноудаленных от двух данных точек. А затем, когда будут изучены признаки равенства прямоугольных треугольников, при решении задачи о нахождения точки, равноудаленной от двух данных точек A и B, необходимо дать определение ГМТ, обладающих некоторым свойством, как множество всех точек, обладающих этим свойством.

7.Создание 3D-игр для учащихся 6-9 классов

3D игры полезны для детей всех возрастов. Они положительно влияют на развитие детской психики, помогают развить у детей логическое и пространственное мышление и воображение.

Кроме того, игра развивает мелкую моторику речь; память концентрацию внимания.

Создание этих игр находятся на стадии разработки, моделирование игр осуществляется в программе КОМПАС 3D.

Заключение

В работе рассмотрены основные методы решения задач на построение в школьном курсе математики, а также проведен анализ учебно-методической литературы, выявлены сходства и отличия методической литературы. Описанные методы рекомендуется использовать для решения геометрических задач на построение. При этом необходимо обращать внимание в том числе и на развитие инициативы учащихся, привитие им вкуса и навыков к решению конструктивных задач. Было бы неправильно думать, что методы решения задач на построение могут служить основой для классификации самих задач. Существенным, а не случайным следует признавать то обстоятельство, что целый ряд задач на построение может одинаково успешно решаться различными методами. С другой стороны, существуют задачи, которые решаются просто комбинацией основных построений без явного применения какого-либо метода.

В исследовательской работе я познакомился с методом вспомогательной окружности и другими методами геометрических построений. Я установил возможность решения задач на построение с помощью одной линейки или только одного циркуля.

Также в ходе работы я выяснил, что из всех методов, рассмотренных мной, невозможно выбрать наиболее рациональный, поскольку целесообразность метода зависит от самой задачи, которую необходимо решить. Я выяснил, что более востребованным методом является алгебраический, а наименее используемым – метод поворота.

В представленной исследовательской работе получены следующие результаты:

1) проведен анализ 8-ми методов решения задач на построение;

2) рассмотрены решения задач с использованием данных методов;

3) установлен критерий разрешимости задач, решаемых алгебраическим методом;

4) приведены подробные примеры решения задач;

5) созданы творческие проекты.

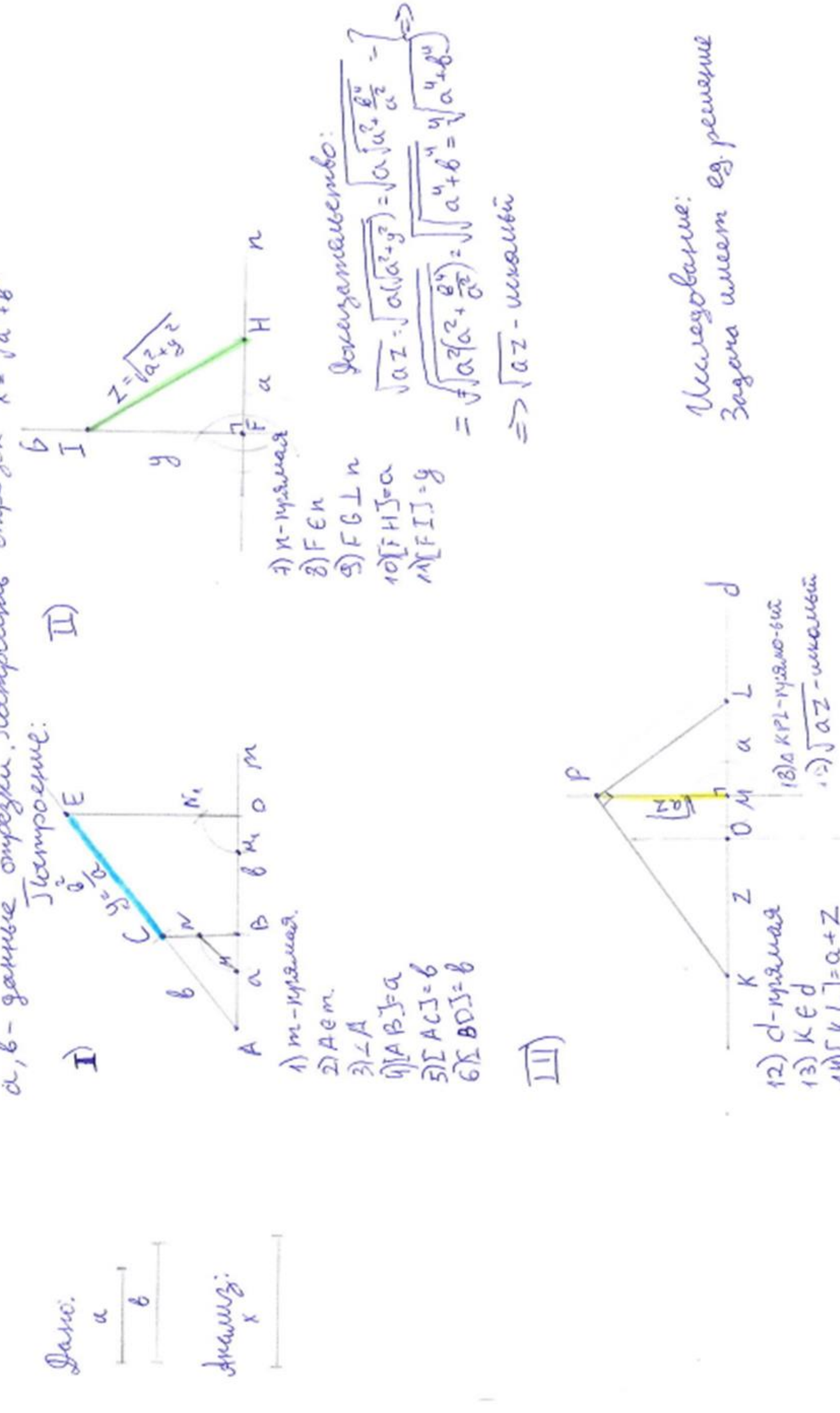
Данный материал может использоваться в качестве основы для элективного курса в классах физико-математического профиля, инженерно-технологического профиля, а также при подготовке к олимпиадам.

Список используемой литературы

1. Факультативный курс по математике «Решение задач», авторы Шарыгин

И.Ф., Голубев В.И., 1991 г.
2. Аргунов Б. И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости - М.: УЧПЕДГИЗ, 1955 –269с.
3. Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений - М.: УЧПЕДИЗ, 1952 -147с.
4. Василевский А. Б. Обучение решению задач - Минск: «Высшая школа», 1979 -191 с.
5. СканавиМ.И.Сборник задач по математики для поступающих в вузы - К.: «Канон», 1997 -582 с.
6. Погорелов А. В. Геометрия - М.:«Наука»,-288 с.
7. Александров И., Сборник геометрических задач на построение, изд.18, М.,1950 - 254с.
8. Глаголев А.Н., Сборник геометрических задач на построение, М., 1986 - 243
9. Зетель С.И., Геометрия линейки и циркуля, М., 1950 - 308
10. Кушнир И.А. Решение задач с помощьюнекоторых формул// математика в школе .- 1985.-354с
11. Геометрия. Атанасян Л.С. 10-11 класс
12. www.alleng.ru ;
13. www.math.ru;
14. http://sgpu-fmf.narod.ru;
15. www.geometria.ru/
16. www.a-geometry.narod.ru/

Приложение



Задача №1
a, в - данные отрезки. Построить отрезок $x = \sqrt[4]{a^4+b^4}$
Дано:
a
в
Анализ:
x
Построение:
I)
$y = \frac{b^2}{a}$
A a B в M_1 O m
C E N N_1 M
1) m - прямая
2) A ∈ m
3) ∠A
4) [AB] = a
5) [AC] = в
6) [BD] = в
II)
б I y F a H n
$z = \sqrt{a^2+y^2}$
7) n - прямая
8) F ∈ n
9) FG ⊥ n
10) [FH] = a
11) [FI] = y
Доказательство:
$\sqrt{az} = \sqrt{a(\sqrt{a^2+y^2})} = \sqrt{a\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}} =$
$= \sqrt{\sqrt{a^2(a^2+\frac{b^4}{a^2})}} = \sqrt{\sqrt{a^4+b^4}} = \sqrt[4]{a^4+b^4}$
$\Rightarrow \sqrt{az}$ - искомый
III)
P
$\sqrt{az}$
K Z O M a L d
12) d - прямая
13) K ∈ d
14) [KL] = a + Z
15) KM = Z; ML = a
16) ω(O; ½ KL)
17) MP ⊥ KL
18) △KPL - прямоуг.
19) $\sqrt{az}$ - искомый
Исследование:
Задача имеет ед. решение

Задача №2

a, b, c, d, e – данные отрезки. Построить отрезок $\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \ldots + \sqrt[4]{e}$

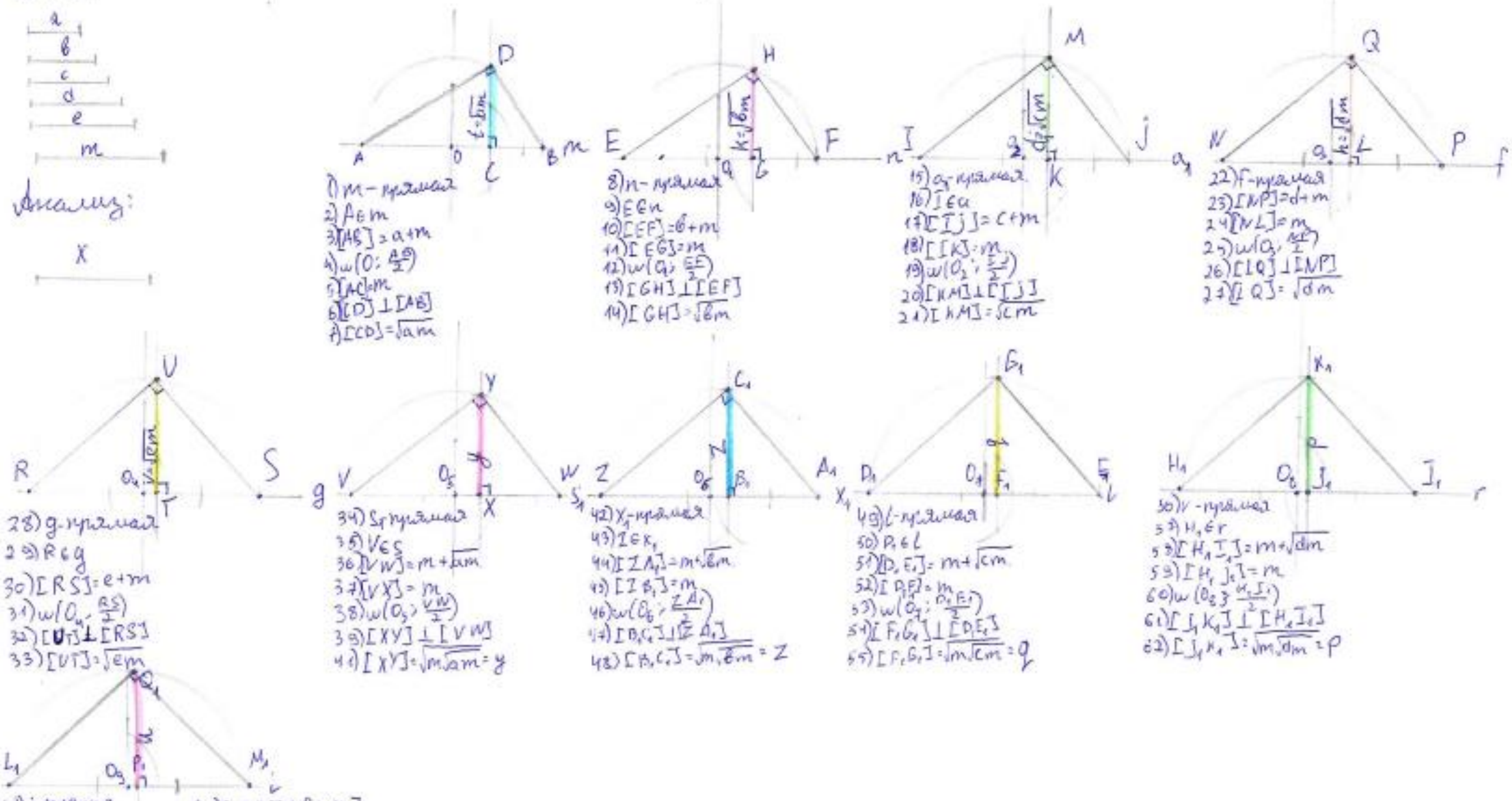
Построение:

Дано:

a, b, c, d, e, m

Анализ:

x



1) m – прямая
2) $A \in m$
3) $[AB] = a + m$
4) $\omega(O; \frac{AB}{2})$
5) $[AC] = m$
6) $[CD] \perp [AB]$
7) $[CD] = \sqrt{am}$

8) n – прямая
9) $E \in n$
10) $[EF] = b + m$
11) $[EG] = m$
12) $\omega(O_1; \frac{EF}{2})$
13) $[GH] \perp [EF]$
14) $[GH] = \sqrt{bm}$

15) a_1 – прямая
16) $I \in a$
17) $[Ij] = c + m$
18) $[IK] = m$
19) $\omega(O_2; \frac{Ij}{2})$
20) $[KM] \perp [Ij]$
21) $[KM] = \sqrt{cm}$

22) f – прямая
23) $[NP] = d + m$
24) $[NL] = m$
25) $\omega(O_3; \frac{NP}{2})$
26) $[LQ] \perp [NP]$
27) $[LQ] = \sqrt{dm}$

28) g – прямая
29) $R \in g$
30) $[RS] = e + m$
31) $\omega(O_4; \frac{RS}{2})$
32) $[UT] \perp [RS]$
33) $[UT] = \sqrt{em}$

34) S_1 – прямая
35) $V \in S$
36) $[VW] = m + \sqrt{am}$
37) $[VX] = m$
38) $\omega(O_5; \frac{VW}{2})$
39) $[XY] \perp [VW]$
40) $[XY] = \sqrt{m\sqrt{am}} = y$

42) X_1 – прямая
43) $Z \in X_1$
44) $[ZA_1] = m + \sqrt{bm}$
45) $[ZB_1] = m$
46) $\omega(O_6; \frac{ZA_1}{2})$
47) $[B_1C_1] \perp [ZA_1]$
48) $[B_1C_1] = \sqrt{m\sqrt{bm}} = z$

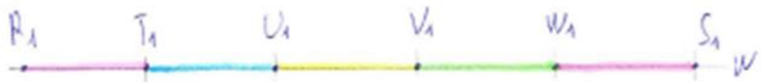
49) l – прямая
50) $D_1 \in l$
51) $[D_1E_1] = m + \sqrt{cm}$
52) $[D_1F_1] = m$
53) $\omega(O_7; \frac{D_1E_1}{2})$
54) $[F_1G_1] \perp [D_1E_1]$
55) $[F_1G_1] = \sqrt{m\sqrt{cm}} = q$

56) r – прямая
57) $H_1 \in r$
58) $[H_1I_1] = m + \sqrt{dm}$
59) $[H_1J_1] = m$
60) $\omega(O_8; \frac{H_1I_1}{2})$
61) $[J_1K_1] \perp [H_1I_1]$
62) $[J_1K_1] = \sqrt{m\sqrt{dm}} = p$

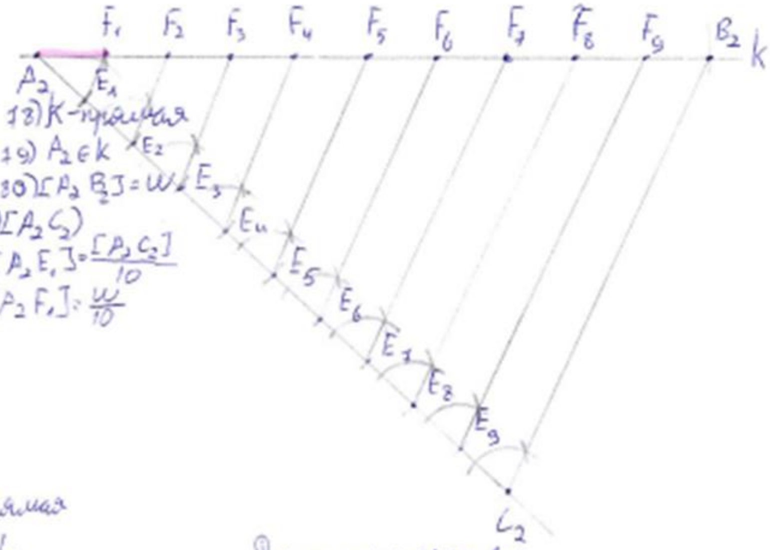
63) i – прямая
64) $L_1 \in i$
65) $[L_1M_1] = m + \sqrt{em}$
66) $[L_1P_1] = m$
67) $\omega(O_9; \frac{L_1M_1}{2})$
68) $[P_1Q_1] \perp [L_1M_1]$
69) $[P_1Q_1] = \sqrt{m\sqrt{em}} = u$

Продолжение задачи №2

Построение:

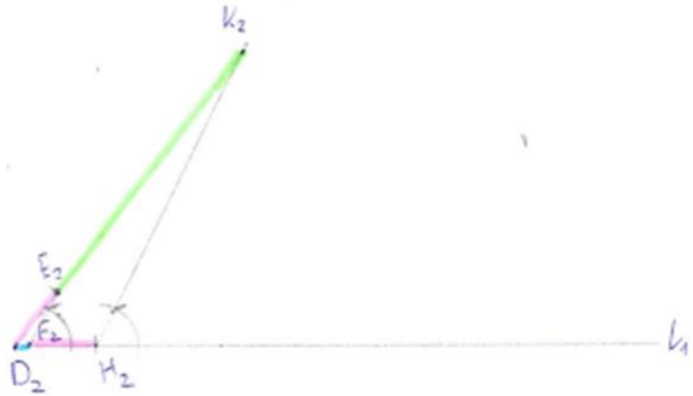


70) W-прямая
71) $R_1 \in W$
72) $[R_1 S_1] = y + z + q + p + u = W$
73) $[R_1 T_1] = y$
74) $[T_1 U_1] = z$
75) $[U_1 V_1] = q$
76) $[V_1 W_1] = p$
77) $[W_1 S_1] = u$



78) K-прямая
79) $A_2 \in k$
80) $[A_2 B_2] = W$
81) $[A_2 C_2)$
82) $[A_2 E_1] = \frac{[A_2 C_2]}{10}$
83) $[A_2 F_1] = \frac{W}{10}$

84) L_1-прямая
85) $D_2 \in L_1$
86) $[D_2 F_2] = \frac{m}{10}$
87) $[D_2 E_2] = [F_2 H_2] = \frac{W}{10}$
88) $[E_2 K_2] = S$



Доказательство:

пусть m - произвольный отрезок, тогда:

$\sqrt[4]{xm^3} = \sqrt[4]{am^3} + \sqrt[4]{bm^3} + \dots + \sqrt[4]{em^3}$

$\sqrt[4]{am^3} = y,\ \sqrt[4]{bm^3} = z, \dots, \sqrt[4]{em^3} = u$

$y = \sqrt[4]{am^3} = \sqrt{m\sqrt{am}}$, замена $t = \sqrt{am}$

$y = \sqrt{mt}$. Аналогично $z = \sqrt{mt_1}, \dots, u = \sqrt{mt_4}$

$w = y + z + q + p + u$

$\sqrt[4]{xm^3} = w$

$xm^3 = w^4$

$x = \frac{w^4}{m^3}$; замена $s = \frac{w^2}{m}$, уменьшаем w в 10 раз, аналогично m в 10 раз

$x = \frac{s^2}{m}$

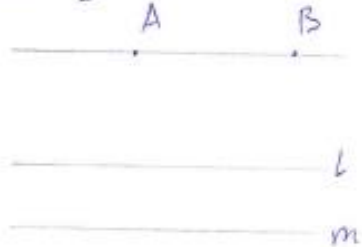
Исследование: Задача имеет ед. решение.

Задача №3

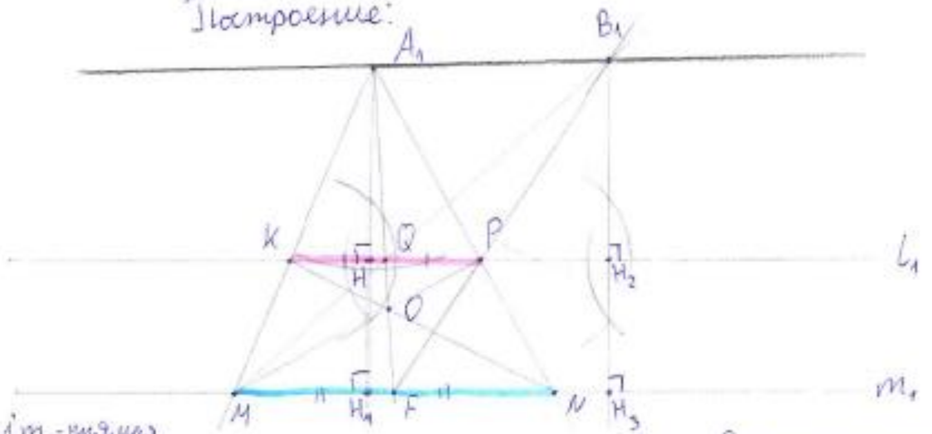
На плоскости задана пара параллельных прямых. При помощи одной линейки через данную точку провести прямую

Дано:

Анализ:



Построение:



1) m_1 - прямая
2) l_1 - прямая
3) $m_1 \parallel l_1$
4) $A_1 \notin m_1, l_1$
5) $[AM] \cap l_1 = K$
6) $[AN] \cap l_1 = P$
7) $KPNM$ - трапеция
8) $[KN] \cap [MP] = O$
9) $[AO] \cap l_1 = Q$
10) $[AO] \cap m_1 = F$
11) $[KQ] = [QP]$
12) $[MF] = [FN]$
13) $[MQ] \cap [FP] = B_1$
14) $A_1B_1 \parallel l_1$
15) $A_1B_1 \parallel m_1$

Доказательство:

A_1, Q, O, F - „замечательные" точки трапеции $\Rightarrow KQ = QP$; $MF = FN$

$\frac{AH}{AH_1} = \frac{KP}{MN} = \frac{BH_2}{BH_3}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1B_1 \parallel l_1, A_1B_1 \parallel m_1$

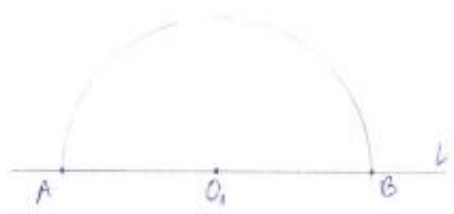
Исследование:

Задача имеет ед. решение

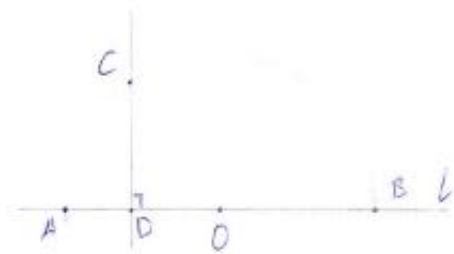
Задача №4

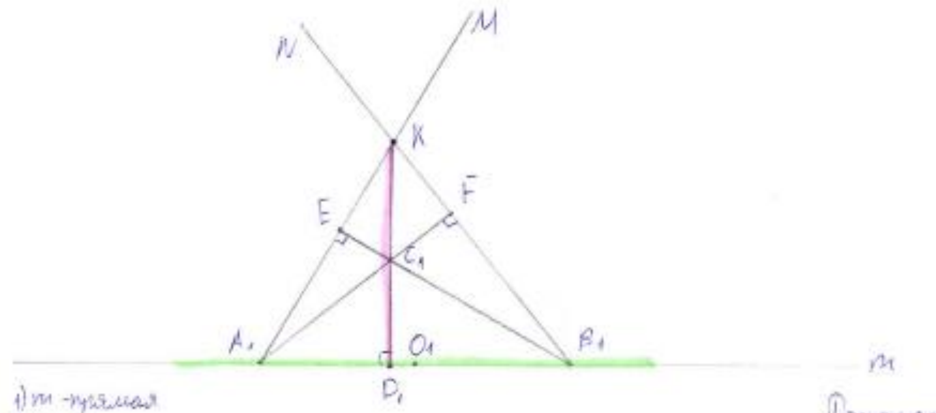
На плоскости дана прямая l и изображение полуокружности с концами на прямой l. Построить какую-либо прямую, перпендикулярную l, при помощи одной линейки.

Дано:



Анализ:





1) m – прямая
2) $O_1 \in m$
3) $\omega(O_1; O_1B_1)$
4) $[O_1B_1] = [OB]$
5) $A_1M \cap B_1N = K$
6) $A_1M \cap \omega(O_1; O_1B_1) = E$
7) $B_1N \cap \omega(O_1; O_1B_1) = F$
8) $[A_1F] \perp [B_1K]$
9) $[B_1E] \perp [A_1K]$
10) $[A_1F] \cap [B_1E] = C_1$
11) $[KC_1] \cap m = D_1$
12) $[KD_1] \perp [A_1B_1]$
13) $[KD_1] \perp m$
14) $[KD_1]$ – искомый

Доказательство:

1) $\angle A_1FB_1 = \angle B_1EA_1 = 90°$ (т.к. $\angle A_1FB_1$ и $\angle B_1EA_1$ – вписанные, опирающиеся на диаметр)
2) A_1F; B_1E – высоты в $\triangle A_1KB_1$
3) $A_1F \cap B_1E = C_1$
4) KD_1 – высота в $\triangle A_1KB_1$, т.к. высоты в $\triangle A_1KB_1$ пересекаются в т. C_1

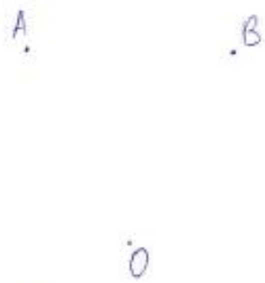
Исследование:

Задача имеет ед. решение.

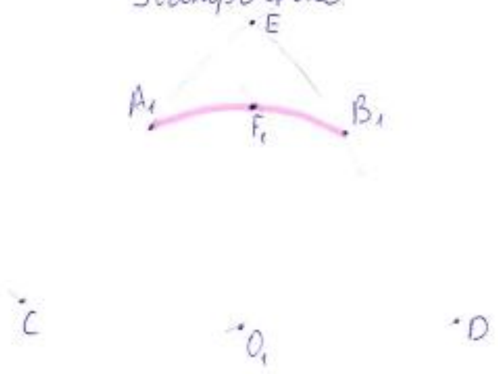
Задача N5

С помощью одного циркуля построить середину заданной дуги окружности с заданным центром

Дано:



Построение:



1) $\omega(O_1; O_1A_1)$, где $O_1A_1 = OA$
2) $\omega(O_1; O_1A_1) \cap \omega(A_1; O_1A_1) = C$
3) $\omega(O_1; O_1A_1) \cap \omega(B_1; O_1A_1) = D$
4) A_1B_1DC – равнобедр. трапеция
5) $\omega(C; CB_1) \cap \omega(D; A_1D) = E$
6) $\omega(C; O_1E) \cap \omega(D; O_1E) = F_1$
7) $\breve{A_1F_1} = \breve{F_1B_1}$

Анализ:

Исследование:

Задача имеет ед. решение.

Доказательство:

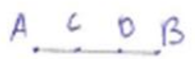
1) $A_1B_1O_1C$ – параллелограмм, так как:
($A_1C = CO_1 = BO_1$ по построению)
$\angle A_1B_1C = \alpha$, тогда $\angle A_1OC = 2\alpha$
$\angle B_1CD = \angle A_1B_1C = \alpha$ (накрест. леж.)
$\angle A_1CB_1 = \alpha$, тогда $\angle B_1CO = 2\alpha - \alpha = \alpha$
ΔCOB_1 – равно-бй $\Rightarrow \angle CB_1O = \alpha$
$CB_1 \perp A_1O \Rightarrow CB_1 \cap A_1O = H$, $B_1OH = 2\alpha$
Аналогично: ΔCA_1B_1, $B_1A_1H = 2\alpha$
тогда ΔA_1B_1O – равносторонний $\Rightarrow$
$\Rightarrow A_1B_1 = B_1O = A_1O$
2) Аналогично: A_1B_1DO – параллелограмм
3) По св. параллелограмма:
$CB_1^2 + A_1O_1^2 = 2A_1B_1^2 + 2B_1O_1^2$
пусть $A_1B_1 = a$; $O_1A_1 = R$
$CB_1^2 = 2A_1B_1^2 + 2B_1O_1^2 - A_1O_1^2$
$CB_1^2 = 2A_1B_1^2 + A_1O_1^2$
$CB_1^2 = 2a^2 + R^2$
4) ΔCO_1E – прям-бй:
$OE^2 = CE^2 - CO^2$
$OE^2 = CB_1^2 - CO^2$
$OE^2 = 2a^2 + R^2 - a^2 = a^2 + R^2$
5) ΔCF_1O_1 – прям-бй:
$CF_1^2 = CO_1^2 + F_1O_1^2$
$CF_1^2 = a^2 + R^2$
6) $O_1E^2 = CF_1^2$
$O_1E = CF$
Ч.т.д.

Задача №6

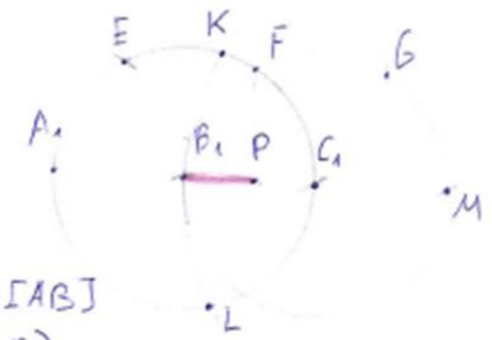
При помощи одного циркуля данный отрезок (указаны концы отрезка) разделить на n равных частей.

Дано:

Анализ:



Построение:



1) $[A_1B_1] = [AB]$
2) $w(B_1; A_1B_1)$
3) $[A_1E] = [EF] = [FC_1] = [A_1B_1]$
4) $w(C_1; C_1B_1)$
5) $[B_1F] = [FG] = [GM] = [B_1C_1]$
6) $w(M; MB_1) \cap w(B_1; A_1B_1) = K$
7) $w(M; MB_1) \cap w(B_1; A_1B_1) = L$
8) $w(L; B_1L) \cap w(K; B_1K) = P$
9) $B_1P = \frac{AB}{n}$ – искомый

Доказательство:

$\Delta A_1B_1E; \Delta EB_1F; \Delta B_1FC_1$ – равностор-ие

$\Downarrow$

$\angle A_1B_1E = \angle EB_1F = \angle FB_1C_1 = 60°$, тогда

$\angle A_1B_1E + \angle EB_1F + \angle FB_1C_1 = 180° \Rightarrow C_1 \in A_1B_1$

Аналогично: $M \in A_1B_1$, где $A_1M = nA_1B_1$

$\Delta B_1KP \sim \Delta KMB_1$ (по 2 углам)

$\Downarrow$

$\frac{B_1K}{KM} = \frac{KP}{MB_1} = \frac{B_1P}{KB_1}$

$\Downarrow$

$\frac{AB}{nAB} = \frac{KP}{MB_1} = \frac{B_1P}{KB_1} \Rightarrow \frac{B_1P}{KB_1} = \frac{1}{n}$, тогда

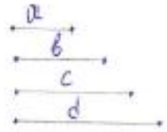
$B_1P = \frac{KB_1}{n} = \frac{AB}{n}$ – искомый

Исследование:

Задача имеет ед. решение.

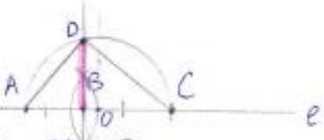
Задача №7
Построить отрезок $x = \sqrt[4]{abcd}$

Дано:

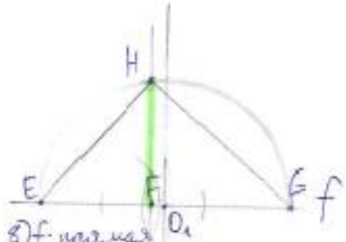


Анализ:

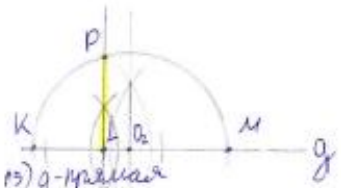
Построение:



1) e - прямая
2) $A \in e$
3) $[AB] = a$
4) $[BC] = b$
5) $\omega(O; OA)$, $OA = \frac{AC}{2}$
6) $[BD] \perp [AC]$
7) $[BD] = \sqrt{ab} = y$



8) f - прямая
9) $E \in f$
10) $[EF] = c$
11) $[FG] = d$
12) $\omega(O_1; OE)$, $OE = \frac{EG}{2}$
13) $[HF] \perp [EG]$
14) $[HF] = \sqrt{cd} = z$



15) g - прямая
16) $K \in g$
17) $[KL] = [BD]$
18) $[LM] = [HF]$
19) $\omega(O_2; O_2K)$, $O_2K = \frac{KM}{2}$
20) $[PL] \perp [KM]$
21) $[PL] = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$

Доказательство:

$x = \sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{abcd}} =$

$= \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt{yz}$, где

$y = \sqrt{ab}$
$z = \sqrt{cd}$

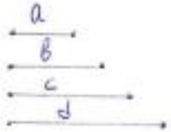
Исследование:

Задача имеет ед. решение.

Задача №8

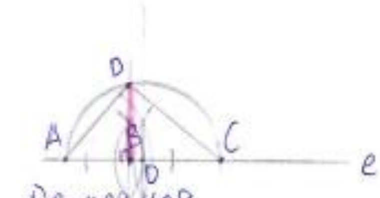
Построить отрезок $x = \sqrt{ab + cd}$

Дано:

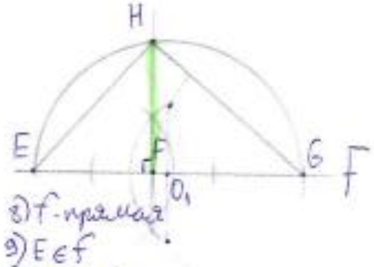


Анализ:

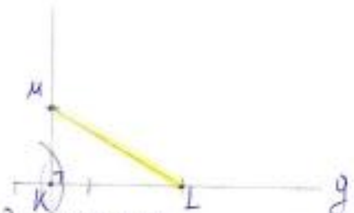
Построение:



1) e – прямая
2) $A \in e$
3) $[AB] = a$
4) $[BC] = b$
5) $\omega(O; OA)$, $OA = \frac{AC}{2}$
6) $[BD] \perp [AC]$
7) $[BD] = \sqrt{ab} = m$



8) f - прямая
9) $E \in f$
10) $[EF] = c$
11) $[FG] = d$
12) $\omega(O_1; O_1E)$, $O_1E = \frac{EG}{2}$
13) $[FH] \perp [EG]$
14) $[FH] = \sqrt{cd} = n$



15) g - прямая
16) $K \in g$
17) $[KL] = n$
18) $[KM] = m$
19) $[KM] \perp [KL]$
20) $[ML] = \sqrt{n^2 + m^2} = \sqrt{ab + cd}$

Доказательство:

$x = \sqrt{ab + cd}$

Возв. в 2 степень

$x^2 = ab + cd$

$ab = (\sqrt{ab})^2 = n^2$, где $n = \sqrt{ab}$

$cd = (\sqrt{cd})^2 = m^2$, где $m = \sqrt{cd}$

$x^2 = n^2 + m^2$

$x = \sqrt{n + m}$

Исследование:

Задача имеет ед. решение.

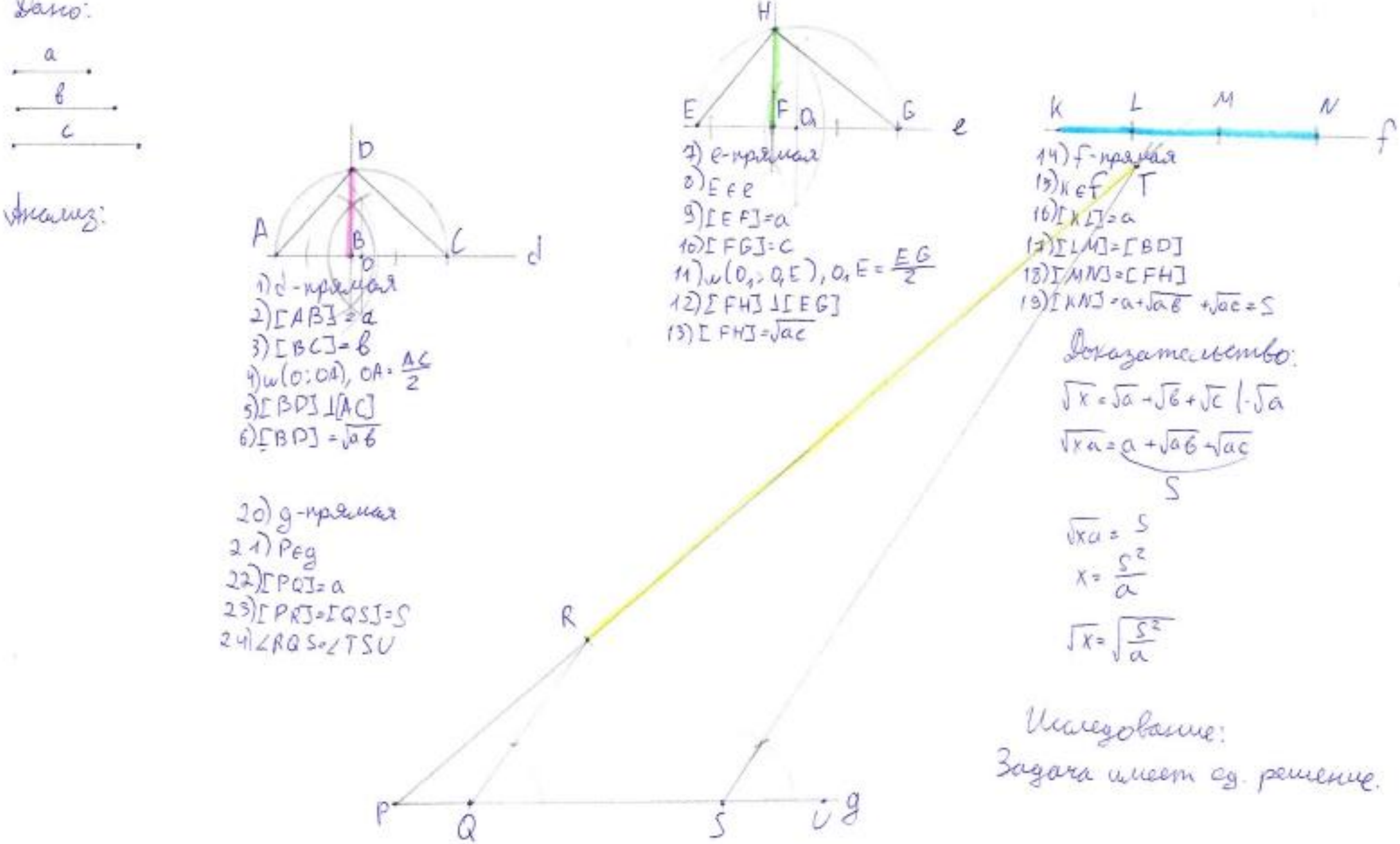
Задача № 9

Построить отрезок $\sqrt{x} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

Дано:

a, b, c

Анализ:



1) d - прямая
2) $[AB] = a$
3) $[BC] = b$
4) $\omega(O; OA)$, $OA = \frac{AC}{2}$
5) $[BD] \perp [AC]$
6) $[BD] = \sqrt{ab}$

7) e - прямая
8) $E \in e$
9) $[EF] = a$
10) $[FG] = c$
11) $\omega(O_1; O_1E)$, $O_1E = \frac{EG}{2}$
12) $[FH] \perp [EG]$
13) $[FH] = \sqrt{ac}$

14) f - прямая
15) $K \in f$
16) $[KL] = a$
17) $[LM] = [BD]$
18) $[MN] = [FH]$
19) $[KN] = a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac} = S$

20) g - прямая
21) $P \in g$
22) $[PQ] = a$
23) $[PR] = [QS] = S$
24) $\angle RQS = \angle TSU$

Доказательство:

$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \mid \cdot \sqrt{a}$

$\sqrt{xa} = \underbrace{a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}}_{S}$

$\sqrt{xa} = S$

$x = \frac{S^2}{a}$

$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{S^2}{a}}$

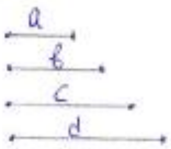
Исследование:

Задача имеет ед. решение.

Задача №10

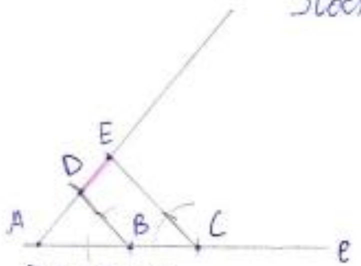
Построить отрезок $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$

Дано:

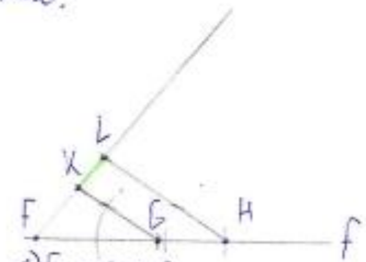


Анализ:

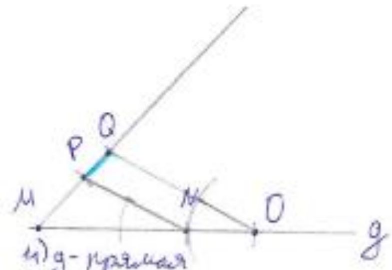
Построение:



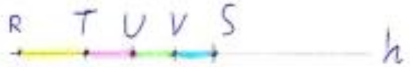
1) e-прямая
2) $A \in e$
3) $[AB] = b$
4) $[AD] = [BC] = a$
5) $[DE] = \frac{a^2}{b}$



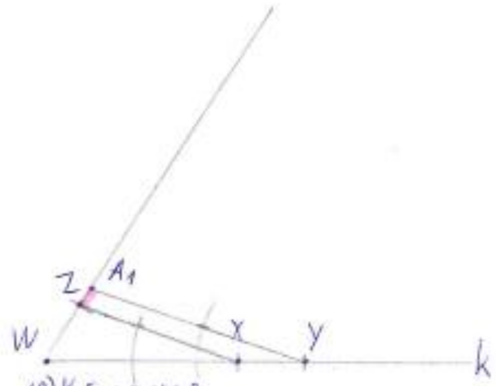
6) f-прямая
7) $F \in f$
8) $[FG] = c$
9) $[GH] = [FK] = a$
10) $[KL] = \frac{a^2}{c}$



11) g-прямая
12) $M \in g$
13) $[MN] = d$
14) $[NO] = [PM] = a$
15) $[PQ] = \frac{a^2}{d}$



16) h-прямая
17) $R \in h$
18) $[RS] = a + \frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{a^2}{d}$



19) k-прямая
20) $W \in k$
21) $[WX] = [RS]$
22) $[XY] = [WZ] = a$
23) $[A_1Z]$-искомый

Доказательство:

$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \;\Big|\cdot a^2$

$\frac{a^2}{x} = a + \underbrace{\frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{a^2}{d}}_{t}$

$\frac{a^2}{x} = t \;\Big|\cdot x$

$a^2 = tx$

$x = \frac{a^2}{t}$

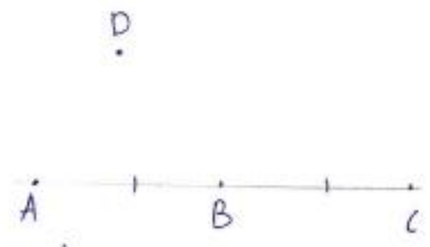
Исследование:

Задача имеет ед. решение.

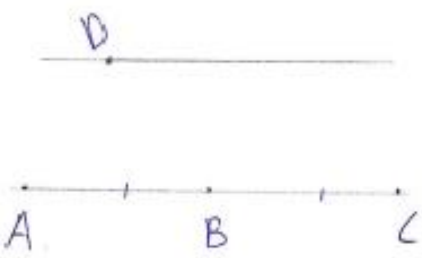
Задача № 11

Дана прямая l, на которой отмечены точки A, B, C; причем $AB=BC$. При помощи одной линейки проведите через данную точку D прямую, параллельную l.

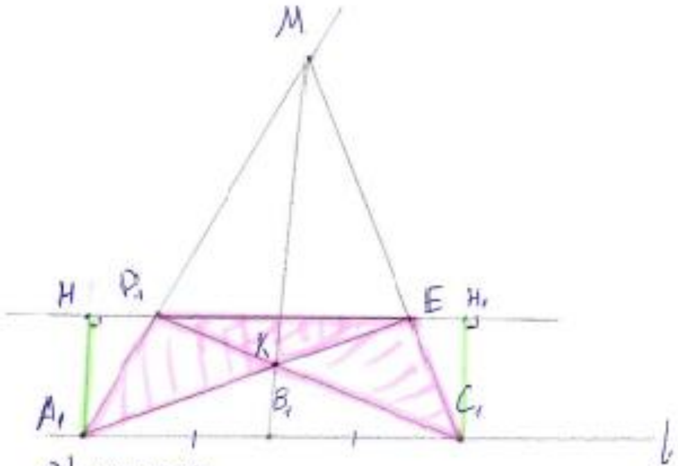
Дано:



Анализ:



Построение:



1) l – прямая
2) $A_1 \in l$
3) $[A_1B_1]=[B_1C_1]=[AB]$
4) $D_1 \notin l$
5) $[A_1D_1)$
6) $M \in [A_1D_1)$
7) $[C_1D_1] \cap [MB_1]=K$
8) $[A_1K] \cap [MC_1]=E$
9) $[D_1E] \parallel l$

Доказательство:

1) MB_1 – медиана в $\triangle A_1MC_1$
$S_{\triangle A_1MB_1}=S_{\triangle C_1MB_1}$
2) KB_1 – медиана в $\triangle A_1KC_1$
$S_{\triangle A_1KB_1}=S_{\triangle C_1KB_1}$
3) $\left.\begin{array}{l} S_{\triangle A_1MK}=S_{\triangle A_1MB_1}-S_{\triangle A_1KB_1} \\ S_{\triangle C_1MK}=S_{\triangle C_1MB_1}-S_{\triangle C_1KB_1} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\triangle A_1MK}=S_{\triangle C_1MK}$
4) $\left.\begin{array}{l} S_{\triangle MD_1E}=S_{\triangle MEC_1}-S_{\triangle D_1EC_1} \\ S_{\triangle MD_1E}=S_{\triangle MEA_1}-S_{\triangle A_1D_1E} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\triangle A_1D_1E}=S_{\triangle D_1EC_1}$
5) $\left.\begin{array}{l} S_{\triangle D_1KE}=S_{\triangle A_1D_1E}-S_{\triangle A_1D_1K} \\ S_{\triangle D_1KE}=S_{\triangle C_1D_1E}-S_{\triangle C_1EK} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\triangle A_1D_1K}=S_{\triangle C_1EK}$
6) $S_{\triangle A_1D_1E}=\dfrac{D_1E \cdot A_1H}{2}$
7) $S_{\triangle C_1D_1E}=\dfrac{D_1E \cdot C_1H_1}{2}$ $\Rightarrow A_1H=C_1H_1$
$\Downarrow$
$D_1E \parallel A_1C_1$

Исследование:

Задача имеет ед. решение.

Задача N 12

Найдите ГМТ пересечения диагоналей прямоугольников, стороны которых (или их продолжения) проходят через 4 данные точки

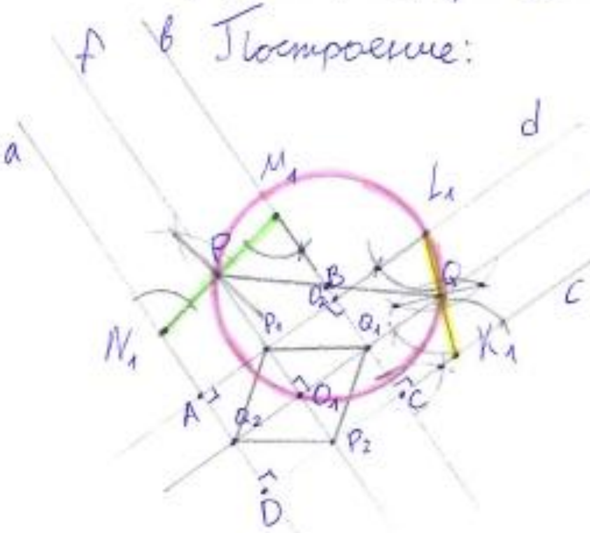
Дано:

M. .L

N. .K

Анализ:

Построение:



1) $N_1; M_1; L_1; K_1$
2) $N_1 \in a$
3) $a \parallel b$, где $M_1 \in b$
4) $K_1 \in c$
5) $c \perp b; c \perp a$
6) $d \parallel c$; $L_1 \in d$
7) $[N_1P] = [PM_1]$
8) $[K_1Q] = [QL_1]$
9) $e \parallel c$; $Q \in e$
10) $f \parallel a$; $P \in f$
11) $ABCD$ - прямо-ик
12) $[BQ_1] = [Q_1C] = [AQ_2] = [Q_2D]$
13) $[AP_1] = [P_1B] = [P_2D] = [P_2C]$
14) $e \cap f = O_1$
15) $\triangle PQO_1$ - прямо-ный
16) $w(Q; \frac{PQ}{2})$ - искомое ГМТ

Доказательство:

1) $a \parallel b$ $\quad a \perp c = D \quad b \perp c = C$
$c \parallel d \quad a \perp d = A \quad b \perp d = B$ $\Rightarrow ABCD$ прямоугольн.

2) P_1 - середина AB (по те-ме Фалеса)
P_2 - середина DC (по те-ме Фалеса)
Q_1 - середина BC (по те-ме Фалеса)
Q_2 - середина AD (по те-ме Фалеса) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_1P_2; O_1Q_2$ - бимедианы
$P_1P_2 \cap Q_1Q_2 = O_1$
$P_1P_2 \perp Q_1Q_2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_1Q_1P_2Q_2$ - пара-мм Вариньона

$\Downarrow$

$P_1Q_1P_2Q_2$ - ромб (т.к. $ABCD$ прямоуг.)

$\Downarrow$

т. O_1 - пересечение диагоналей в $ABCD$

Исследование:

Задача имеет ед. решение

Задача N 13

Даны две точки A и Q. Найдите ГМТ B, таких, что существует остроугольный треугольник ABC для которого Q - точка пересечения медиан.

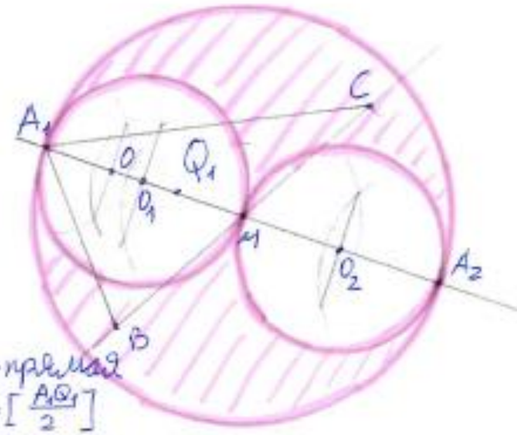
Дано:

A. Q.

Анализ:

.O

Построение:



1) AQ_1 - прямая
2) $[QM]=[\frac{AQ_1}{2}]$
3) $[MA_2]=[MA_1]$
4) $\omega(M; MA_1)$
5) $\omega(O_1; \frac{MA_1}{2})$
6) $\omega(O_2; \frac{MA_2}{2})$
7) искомое ГМТ - заштрихованная область

Доказательство:

1) Если B и C лежат на $\omega(M; MA_1)$, то $\triangle A_1BC$ - прямоугольный, т.к. $\angle BA_1C$ опирается на BC как на диаметр $\angle BA_1C=90°$ противоречие.
2) Если B и C лежат за $\omega(M; MA_1)$, то $\triangle A_1BC$ - тупоугольный, т.к. $\angle BA_1C>90°$ противоречие

⇓

$\triangle ABC$ - остроугольный и точки B и C лежат внутри $\omega(M; MA_1)$

3) Если точка B лежит на $\omega(O_1; \frac{MA_1}{2})$, точка C лежит на $\omega(O_2; \frac{MA_2}{2})$, тогда $\angle A_1BC=90°$, т.к. $\angle A_1BC\neq 90° \Rightarrow$ противоречие
4) Если точка C лежит на $\omega(O_1; \frac{MA_1}{2})$, точка B лежит на $\omega(O_2; \frac{MA_2}{2})$, тогда $\angle CA_1B=90°$, т.к. $\angle CA_1B\neq 90° \Rightarrow$ противоречие

⇓

искомое ГМТ - заштрихованная область

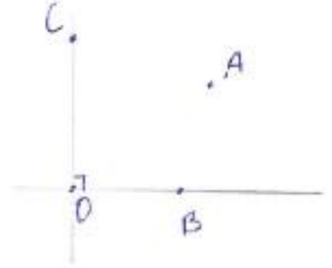
Исследование:

Задача имеет ед. решение.

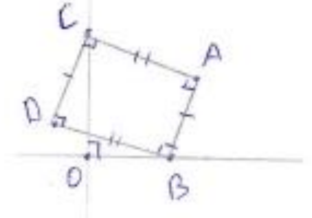
Задача № 14

Одна вершина прямоугольника находится в данной точке, две другие, не принадлежащие одной стороне – на двух заданных взаимно перпендикулярных прямых.
Найдите ГМТ четвёртых вершин таких прямоугольников.

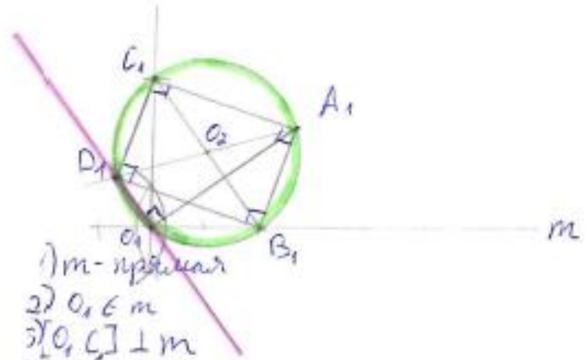
Дано:



Анализ:



Построение:



1) m – прямая
2) $O_1 \in m$
3) $[O_1C_1] \perp m$
4) $[O_1C_1] = [OC]$
5) $[O_1B_1] = [OB]$
6) $A_1B_1C_1D_1$ – прям-ик.
7) $A_1; B_1; C_1; D_1; O_1 \in w(O_2; O_2A_1)$
8) $D_1O_1 \perp O_1A_1$
9) D_1O_1 – искомое ГМТ

Доказательство:

$A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник, $\Rightarrow$ можно описать окружность $w(O_2; O_2A_1)$

$\angle C_1D_1B_1 = 90°$ (т.к. опирается на C_1B_1)
$\angle C_1O_1B_1 = 90°$ (по условию), опирается на C_1B_1 $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ описанные окружности $\Delta C_1D_1B_1$ и $\Delta C_1O_1B_1$ совпадают $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_1; D_1; O_1; B_1 \in w(O_2; O_2A_1)$, т.к. $C_1B_1 = A_1D_1$ ($A_1B_1C_1D_1$ – прям-ик), окружности $\Delta C_1D_1B_1$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают

$\Downarrow$

$A_1; B_1; C_1; D_1; O_1 \in w(O_2; O_2A_1)$

$\Downarrow$

$\angle D_1O_1A_1 = 90°$ (вписанный, опирается на A_1D_1)

$\Downarrow$

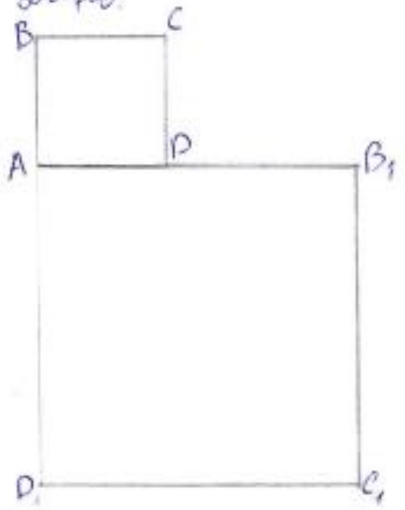
D_1O_1 – искомое ГМТ

Исследование:
Задача имеет ед. решение.

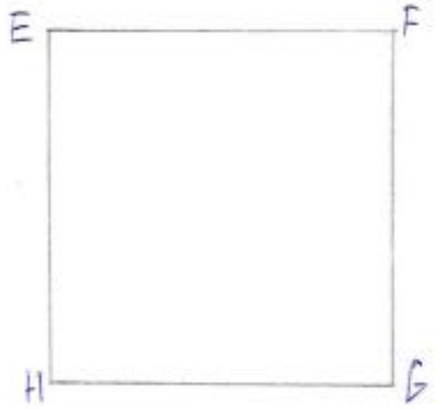
Задача N 15

Разрезать два данных квадрата на части, из которых можно сложить новый квадрат.

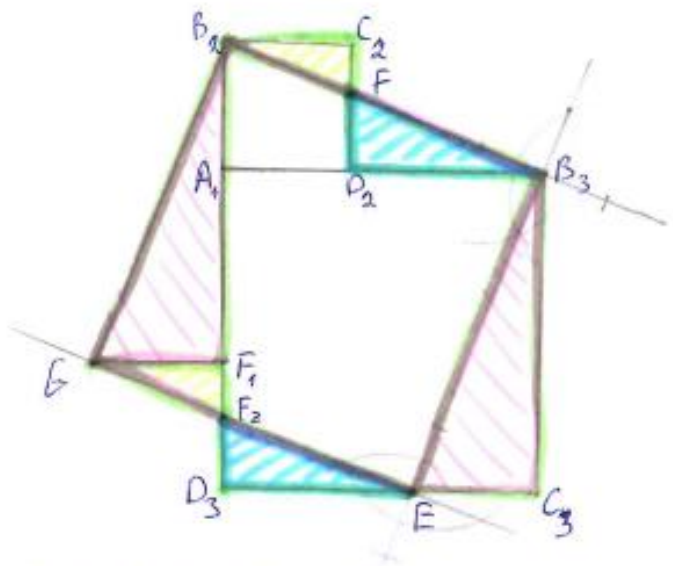
Дано:



Анализ:



Построение:



1) $A_1B_2C_2D_2$ - квадрат
2) $A_1B_3C_3D_3$ - квадрат
3) $B_3 \to E$; $C_2 \to F_1$; $B_2 \to G$
4) B_2B_3EG - искомый квадрат

Доказательство:

При движении точек C_2; F в точки F_1; F_2 $C_2F = F_1F_2$

Аналогично:

$FD_2 = F_2D_3$

$B_2C_2 = GF_1$

$D_2B_3 = D_3E$

$\Rightarrow \Delta GF_1F_2 = \Delta B_2C_2F$

$\Delta F_2D_3E = \Delta FD_2B_3$

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} A_1D_2 = EC_3 \\ B_2B_3 = B_3E \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta GF_1B_2 = \Delta EC_3B_3$

$\Downarrow$

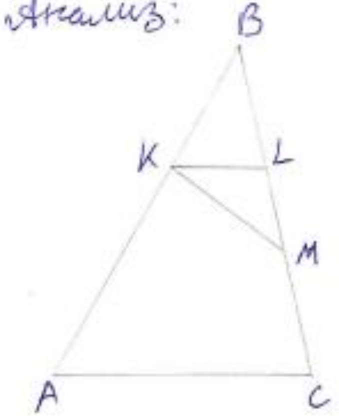
B_2B_3EG - искомый квадрат.

Задача №16

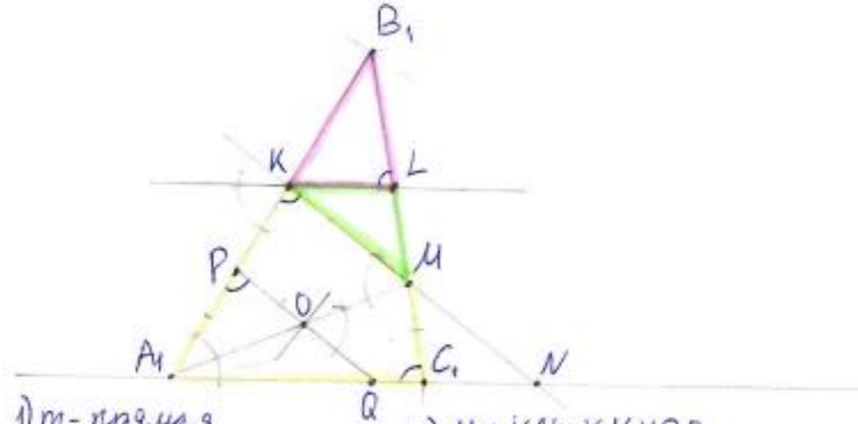
Данный треугольник, не являющийся правильным, разрежьте на три части так, чтобы одна из них являлась треугольником, подобным данному, а из двух оставшихся можно сложить треугольник, подобный данному.

Дано:

Анализ:



Построение



1) m - прямая
2) $A_1 \in m$
3) $[A_1C_1] = [AC]$
4) $[A_1B_1] = [AB]$
5) $[B_1C_1] = [BC]$
6) $P \in [A_1B_1]$
7) $Q \in [A_1C_1]$
8) $\angle A_1PQ = \angle A_1C_1B_1$
9) $[PO] = [OQ]$
10) $[A_1O] \cap [B_1C_1] = M$
11) $M \in KN$; $KN \parallel PQ$
12) $[KL] \parallel [A_1C_1]$
13) $\triangle B_1KL$ - искомая часть
14) $\triangle KLM$ - искомая часть
15) A_1KMC_1 - искомая часть

Исследование:
Задача имеет ед. решение

Доказательство:

$\left.\begin{array}{l} PQ \parallel NK \\ PO = OQ \end{array}\right\} \Rightarrow KM = MN$ (по т-ме Фалеса)

$\triangle KLM$ и $\triangle C_1MN$
1) $KM = MN$
2) $\angle KML = \angle NMC_1$
3) $\angle LKM = \angle MNC_1$
$\Rightarrow \triangle KLM = \triangle C_1MN$ (по 2 углам и прилег. стороне)

$\left.\begin{array}{l} \angle A_1PQ = \angle A_1KN \\ \angle A_1PQ = \angle A_1C_1B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1C_1B_1 = \angle A_1KN$

$\triangle A_1NK$ и $\triangle A_1B_1C_1$
1) $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1KN$
2) $\angle A_1$ - общий
$\Rightarrow \triangle A_1NK \sim \triangle A_1B_1C_1$

$\triangle KB_1L$ и $\triangle A_1B_1C_1$
1) $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1KL$
2) $\angle B_1C_1A_1 = \angle B_1LK$
$\Rightarrow \triangle KB_1L \sim \triangle A_1B_1C_1$

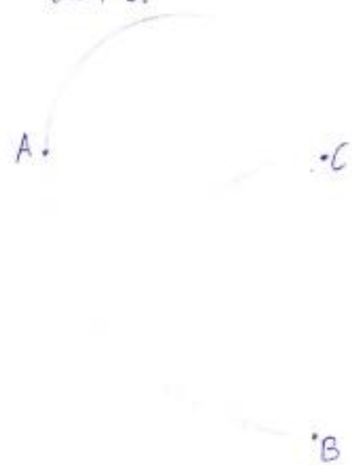
$\Downarrow$

$\triangle B_1KL$, $\triangle KLM$, A_1KMC_1 - искомые части.

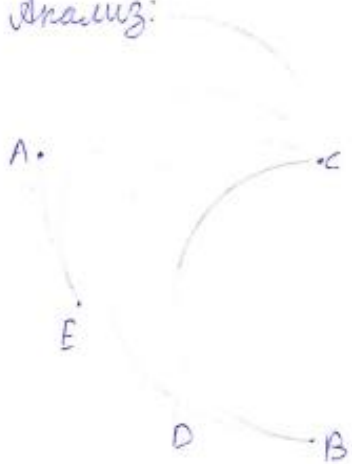
Задача N 17

Можно ли данную фигуру разрезать на n равных частей? ($\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{BC}$ имеют равный радиус)

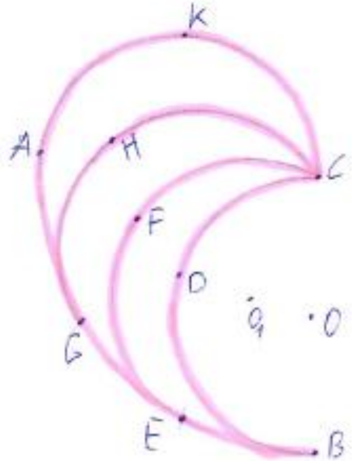
Дано:



Анализ:



Построение:



1) ACB - данная фигура
2) $O_1B = BE$
3) $\overset{\smile}{CDB} = \overset{\smile}{CFE}$
4) $O_1E = EG$
5) $\overset{\smile}{CFE} = \overset{\smile}{CHG} = \overset{\smile}{AKC}$
6) CKAG, CHGE, CFEB - равные части данной фигуры

Доказательство:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\smile}{CDB} = \overset{\smile}{CFE} \text{ (по постр)} \\ &\overset{\smile}{CFE} = \overset{\smile}{CHG} = \overset{\smile}{AKC} \text{ (по постр)} \\ &\overset{\smile}{AKC} = \overset{\smile}{CDB} \text{ (по данному)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{\smile}{CDB} = \overset{\smile}{CFE} = \overset{\smile}{CHG} = \overset{\smile}{AKC}$$

$$\Downarrow$$

CKAG, CHGE, CFEB - равные части данной фигуры

Исследование:

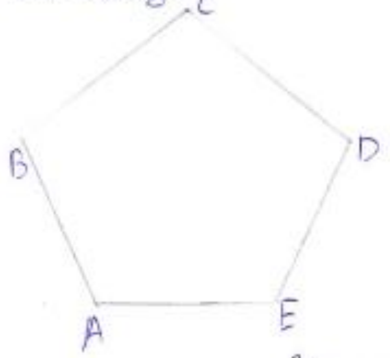
Задача имеет ед. решение

Задача № 18

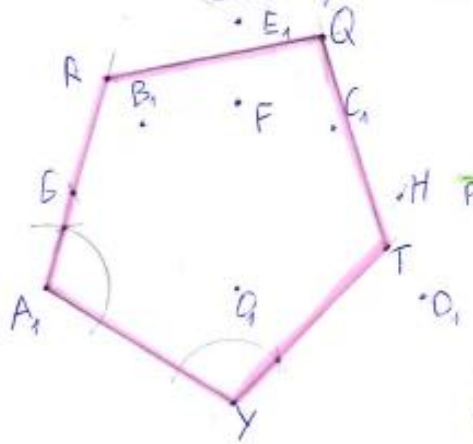
Построить правильный пятиугольник, если дана окружность и произвольная точка на ней

Дано

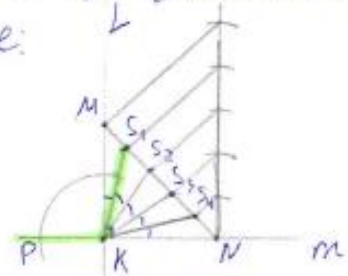
Анализ:



Построение:



1) $\omega(O; OA)$
2) $A_1 \in \omega(O; OA)$
3) $OA_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A$
4) $\omega(A_1; A_1C_1) \cap \omega(O_1; O_1B_1) = E_1$
5) $\omega(A_1; O_1E_1) \cap \omega(D_1; O_1E_1) = F$
6) $\omega(F; O_1A_1) \cap \omega(Q; O_1A_1) = G; H$
7) $\omega(G; O_1E_1) \cap \omega(H; O_1E_1) = Y$
8) A_1Y – сторона пятиугольника



9) m – прямая
10) $K \in m$
11) $KL \perp m$
12) $KM = KN$
13) $MS_1 = S_1S_2 = S_2S_3 = S_3S_4 = S_4N$
14) $\angle MKS_1 = \angle S_1KS_2 = \angle S_2KS_3 = \angle S_3KS_4 = \angle S_4KN = 18°$
15) $\angle PKS_1 = 180° - \angle NKS_1 = 108°$
16) $\angle PKS_1 = \angle A_1 = \angle Y$
17) $A_1Y = A_1R = YT$
18) $\omega(R; A_1Y) \cap \omega(T; A_1Y) = Q$

Исследование:

Задача имеет ед. решение

Доказательство:

F – середина дуги B_1C_1 (доказательство в задаче 5)

Y – равноудалена от G и H на O_1E_1

E_1 – равно удалена от A_1 и D_1 на A_1C_1

⇓

E_1; F; O_1; Y – лежат на одной прямой

$\triangle KNM$ – равнобедренный прямоугольный

⇓

$KM = NK$

$MS_1 = S_1S_2 = S_2S_3 = S_3S_4 = S_4N$

$\angle NMK = \angle KNM$

$\Rightarrow \triangle MKS_1 = \triangle NKS_4$

Аналогично: $\triangle S_1KS_2 = \triangle S_4KS_3$

⇓

$\angle MKS_1 = \angle S_1KS_2 = \angle S_2KS_3 = \angle S_3KS_4 = \angle S_4KN$

⇓

$\angle MKS_1 = 18° \Rightarrow \angle PKS_1 = 108° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PKS_1 = \angle A_1 = \angle Y = 108° \Rightarrow$

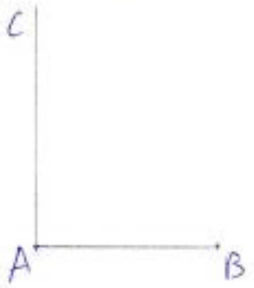
$\Rightarrow A_1RQTY$ – правильный пятиугольник

Задача № 19

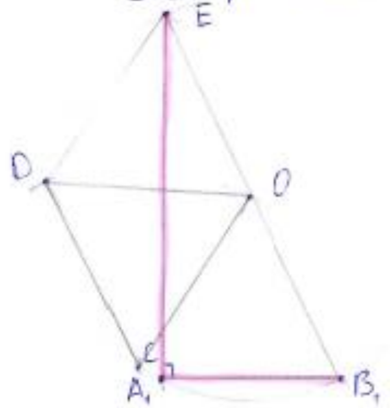
Построить прямую, перпендикулярную к заданному отрезку и проходящую через один из его концов

Дано.

Анализ:



Построение:



1) $[A_1B_1] = [AB]$
2) $\omega(A_1, R) \cap \omega(B_1, R) = O$
3) $\omega(O; R)$
4) $R = [B_1C] = [CD] = [DE]$
5) $\breve{CB_1} = \breve{CD} = \breve{DE} = 60°$
6) E - диаметрально против-на точке B_1
7) $[EA_1] \perp [A_1B_1]$
8) $[EA_1]$ - искомый

Доказательство:

$R = OB_1 = B_1C = CD = DE = EO = OD = OC = CB_1$ ⇒ $\angle B_1OE$ - развернутый

⇓

B_1E - диаметр

⇓

$\angle EA_1B_1 = 90°$

⇓

$EA_1 \perp A_1B_1$

⇓

EA_1 - искомый

Исследование:

Задача имеет ед. решение