**Департамент образования мэрии города Новосибирска**

**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение города Новосибирска «Лицей № 159»**

# «Платоновы и Архимедовы тела как уникальные геометрические объекты науки и природы»

Выполнили: ***Макарова Валерия Евгеньевна,***

***Иванова Кристина Сергеевна,***

***Фирстова Анастасия Дмитриевна,***

Учащиеся 10 «Б» специализированного класса

инженерно- технологического направления,

МБОУ «Лицей №159», Россия, г. Новосибирск

Руководитель:

***Бутакова Виктория Игоревна***

Учитель математики, магистр

МБОУ «Лицей №159», Россия, г. Новосибирск

## Оглавление



## Введение

**Предметная область:** математика, технология

**Проблема:** как использовать пластик с пользой для окружающего мира, помогая природе? Пластик может навредить природе и одновременно помочь сохранить её красоту и эстетику. Красоту и эстетику мы хотим показать через создание кормушек и флорариумов. Птицы не всегда могут найти себе подходящее место жительства из-за своих конкретных предпочтений, что способствует голоду и замерзанию. Таким образом, с помощью задач по теме нашего исследования можно рассчитать размеры идеальной кормушки. Флорариум – композиции из маленьких растений, камней, песка и искусственного декора, помещенной в прозрачную емкость (из стекла или пластика). Растения, как и птицы, являются очень важными составляющими нашего окружающего мира. Рассматриваемые в нашей работе задачи на построение сечений повышенной сложности встречаются на профильном экзамене по математике, но на базовом уровне математики эти темы не изучаются вовсе, тем актуальнее наше исследование. Это способствует неравенству условий подготовки к экзамену учеников из специализированных и непрофильных классов.

**Актуальность исследования:** данная тема актуальна, так как выбирая профессию инженера, ученику необходимо иметь достаточно прочные знания по алгебре и геометрии. Знание и понимание стереометрии опирается не столько на теоретические основы, представленные в учебной литературе, сколько на способность учащегося видеть и правильно представлять пространственную фигуру. Одним из главных средств достижения целей образования средствами геометрии являются задачи на построение сечений многогранников и круглых тел. Построение кормушек и флорариумов в форме архимедовых тел позволяет построить сечение, которое является полочкой для кормления птиц, визуализировать Архимедовы тела в качестве домиков для птиц. При условии объединения двух наук мы можем получить оптимальное решение в данной ситуации, так как можно полностью рассчитать размеры дна, летка и тому подобное, что делает нахождение птиц в кормушке более комфортным, а построение кормушки математической задачей. Нам хотелось бы глобальнее проявить заботу о пернатых. Таким образом, помогая птицам и растениям, можно воспитать чувство ответственности за живое на земле, развить чуткость, доброту и познавательный интерес к природе. Наши кормушки и флорариумы построены из экологически чистого пластика, который подлежит повторной переработке, что позволяет не наносить значительный ущерб природе. В последнее время очень актуально создание флорариума своими руками, поэтому мы решили создать собственные флорариумы из Архимедовых тел и в дальнейшем распространить данный опыт.

**Цель работы:** построение скворечников и флорариумов в виде Архимедовых тел, нахождение площадей нестандартных сечений многогранников.

**Задачи работы:**

1. Изучить научную литературу по данной проблеме;
2. Ознакомиться с методами построения сечений;
3. Систематизировать виды сечений;
4. Построение 3D моделей выпуклых и невыпуклых многогранников;

5. Решение задач по теме исследования на построение сечений и нахождение их площади;

**Тип работы:** поисковый, исследовательский.

**Используемые технологии:** конструирование, 3D моделирование.

**Исследование проекта:** исследование принципа создания кормушки, а также технологии его выполнения.

**Область применения результата проекта:** геометрия, архитектура, дизайн, технология.

## Сечения многогранников

Сечение — это плоская фигура, которая образуется при пересечении пространственной фигуры плоскостью, и граница которой лежит на поверхности пространственной фигуры.

**Важные факты и теоремы, необходимые для построения сечений:**

*Признак параллельности прямой и плоскости:* прямая, не лежащая в плоскости, параллельна этой плоскости, если она параллельна некоторой прямой из этой плоскости.

Если две плоскости пересекаются, то их линия пересечения — прямая.

*Аксиома 1*: через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и причем только одна.

*Аксиома 2*: если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

*Следствия из аксиом:*

- Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.
- Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

**Правила построения сечений многогранников:**

1) проводим прямые через точки, лежащие в одной плоскости;

2) ищем прямые пересечения плоскости сечения с гранями многогранника, для этого:

а) ищем точки пересечения прямой принадлежащей плоскости сечения с прямой, принадлежащей одной из граней (лежащие в одной плоскости);

б) параллельные грани плоскость сечения пересекает по параллельным прямым.

## Кормушки и их виды

**Кормушка** — искусственное гнездовье для мелких птиц, преимущественно гнездящихся в дуплах. Среди всех искусственных гнездовий кормушки наиболее популярны среди любителей. Такие гнездовья для мелких воробьинообразных птиц часто делаются любителями и располагаются в городской местности.

**Назначение:**

Кормушки могут устанавливаться с несколькими целями:

- Привлечение птиц для наблюдения за их гнездованием с исследовательскими целями;
- Воспитание любви к природе и труду у детей.

***Таблица 1***

**Стандартные размеры кормушек**

| Разновидность птиц | Высота многогранника (кормушки) | Размер основания многогранника (дна кормушки) | Размер (диаметр) летка |
|---|---|---|---|
| Скворцы | 30 – 35 см | 15×15 см | 5 см |
| Синицы | 20 – 25 см | 13×13 см | 3 – 3,5 см |
| Горихвостки | 20 – 25 см | 15×15 см | 3,5 – 4 см |
| Воробьи | 22 – 25 см | 14×14 см | 3,5 – 5 см |
| Лазоревка | 25 – 30 см | 12×12 см | 3,2 – 3,5 см |

## Флорариумы и их виды

**Флорариум**, **растительный террариум** — специальная закрытая ёмкость, изготовленная из стекла или других прозрачных материалов и предназначенная для содержания и разведения растений. Внутри создаются определённая влажность воздуха и температура. Часто используется для выращивания прихотливых тропических растений. Флорариумы могут быть различными не только по форме и размеру. Изготавливают такие террариумы из цельного стекла и пластика — как заводским методом, так и при помощи подручных средств. Внутри создаются растительные композиции, напоминающие внешне естественные природные ландшафты.

## Задачи по теме исследования

**Задача №1**

***Дан куб. Ребро куба равно а. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через середины ребер $AA_1$, AD и $A_1B_1$.***

1) Обозначим названные в условии середины ребер соответственно через M, P, K.
2) Продлим отрезок MK до его пересечения в точках T и E с продолжениями ребер $BB_1$ и BA.
3) Продлим ребро BC.
4) Через точки E и P проведем прямую до ее пересечения в точке S с продолжением ребра BC.
5) Проведем прямую через точки S и T.
6) Соединив точки K, M, P, L, F, H, получаем сечение куба в виде многоугольника.
7) Так как противоположные стороны этого многоугольника лежат на пересечении параллельных граней плоскостью сечения, то они параллельны.
8) Рассмотрим $\Delta KTB$ и $\Delta KA_1M$:
   - $\angle TKB = \angle A_1KM$ (вертикальные)
   - $\angle KA_1M = \angle KBT$ (накрест лежащие) $\quad \Delta KTB = \Delta KA_1M$
   - $BK = KA_1$ (по условию) (по стороне и двум прилежащим углам).
9) Аналогично $\Delta KTB = \Delta KA_1M = \Delta MAE \Rightarrow AE = B_1T = \frac{a}{2}$.
10) Рассмотрим $\Delta APE$ и $\Delta PDL$:
   - $\angle APE = \angle LPD$ (вертикальные)
   - $\angle LDP = \angle PAE$ (накрест лежащие) $\quad \Delta APE = \Delta PDL$
   - $AP = PD$ (по условию) (по стороне и двум прилежащим углам).

11) Из (10) $\Rightarrow DL - LC = CS = \frac{a}{2} \Rightarrow BT = BS$ => $\Delta TBS -$ равнобедренный и прямоугольный ($\angle TBS = 90^{\circ}$) $\Rightarrow, \angle FSB = \angle B_1TH = 45^{\circ}$.

12) $\Delta B_1TH -$ прямоугольный ($\angle TB1H = 90^{\circ}$) => $\angle B_1TH = \angle B_1HT = 45^{\circ}$.

13) Из (11) и (12) $\Rightarrow \angle B_1TH = \angle FSB = 45^{\circ}$.

14) (.)H и (.)F являются серединами сторон $B_1C_1$ и $CC_1$ соответственно.

15) Рассмотрим $\Delta HC_1F$:

По теореме Пифагора:

$$HF^2 = HC_1^2 + C_1F^2$$

$$HF^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$HF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$HF^2 = \frac{2a^2}{4}$$

$$HF^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$HF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

16) Так как $AM = AP = AE,$ то $\Delta MPE$ – равносторонний $\Rightarrow \angle EMP = 60^{\circ} \Rightarrow \angle MPL = 120^{\circ}$ (так как $\angle EMP$ и $\angle PMT$ – смежные).

17) Аналогично $\angle PLF = \angle LFH = \angle FHK = \angle HKM = \angle KMP = 120^{\circ}$.

18) $SKMPLFH = SMKHF + SMFLP$

$$S_{KMPLFH} = 2 \cdot SMKHF$$

$$S_{MKHF} = \frac{KH + MF}{2} \cdot h$$

19) $h^2 = KM^2 - MN^2$

20) $MN = \frac{MK}{2}$ (по свойству $\angle MKN = 30^{\circ}$)

21) $MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = QF$ (так как трапеция равнобокая)

$$h^2 = (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{a\sqrt{2}}{4})^2$$

$$h^2 = \frac{2a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}$$

$$h^2 = \frac{8a^2 - 2a^2}{16}$$

$$h^2 = \frac{6a^2}{16} = \frac{3a^2}{8}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

22) $MF = MN + NQ + QF$

$$MF = \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{2a\sqrt{2}}{4} + \frac{2a\sqrt{2}}{4} = \frac{4a\sqrt{2}}{4} = a\sqrt{2}$$

23) $S_{KMPLFH} = 2 \cdot (\frac{KH+MF}{2} \cdot h)$

$$S_{KMPLFH} = 2 \cdot (\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}) = 2 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{2a\sqrt{2}}{2}\right) \cdot a\sqrt{6}}{8} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{6}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{12}}{8}$$

$$= \frac{6a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $S_{KMPLFH} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

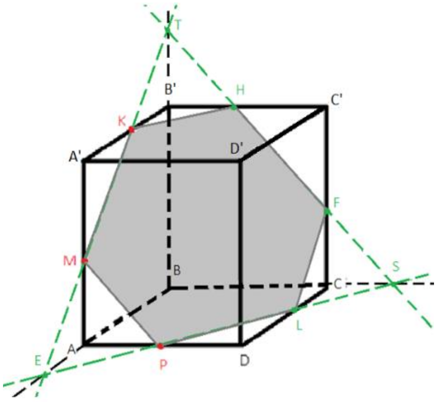



*Рисунок 1*

**Задача №3**

***Дан прямоугольный параллелепипед ABCDA'B'C'D', в основании которого лежит квадрат ABCD. На ребрах BB', CC', DD' отмечены точки M, N, K соответственно так, что $\frac{BM}{MB'}=\frac{1}{5}$, $\frac{CN}{NC'}=\frac{3}{1}$, $\frac{DK}{KD'}=\frac{1}{2}$. Найдите отношение отрезков, на которые делит плоскость MNK диагональ AC.***

1) Обозначим ребро основания за a, а боковое ребро за b.

2) $BM = \frac{1}{6}b$.

3) $CN = \frac{3}{4}b$. исходит из условия

4) $DK = \frac{1}{3}b$.

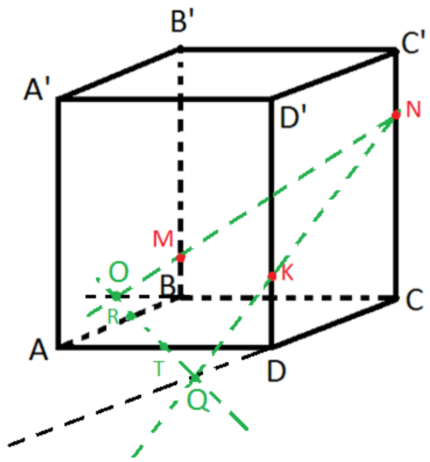



*Рисунок 2*

5) Найдем положение точек R и T, в которых плоскость пересекает ребра AB и AD соответственно:

1. Продлим отрезки NK и CD до пересечения в точке Q.
2. Рассмотрим ΔKDQи ΔQCN:

- ∠NQC-общий
- $\angle KDQ = \angle NCQ = 90^\circ$ (по условию)

$\Delta KDQ \sim \Delta NCQ$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{QD}{QC} = \frac{KD}{NC} \Rightarrow$

$$\frac{QD}{QD+DC} = \frac{\frac{1}{3}b}{\frac{3}{4}b} \Rightarrow \frac{QD}{QD+a} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9QD = 4QD + 4a \Rightarrow 5QD = 4a, QD = \frac{4}{5}a$$

3. Аналогично из $\Delta OMB \sim \Delta ONC \Rightarrow \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{NC}} \Rightarrow \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB}+BC} = \frac{\frac{1}{6}b}{\frac{3}{4}b} \Rightarrow \frac{OB}{OB+a} = \frac{2}{9} \Rightarrow$

$$9\mathrm{OB} = 2\mathrm{OB} + 2\mathrm{a} \Rightarrow 7OB = 2a \Rightarrow \mathrm{OB} = \frac{2}{7}a$$

4. Из (3) и (4) ⇒Соединив точки Q и O, получим точки пересечения плоскости с ребрами AB и AD.

6) Рассмотрим основание:

1. Рассмотрим ΔOBR иΔOCQ:

- ∠COB-общий
- $\angle OBR = \angle OCQ = 90^\circ$ (по условию)

ΔOBR~ΔOCQ (по двум углам).

$$\frac{OB}{OC} = \frac{BR}{CQ} \Rightarrow \frac{\frac{2}{7}a}{\frac{9}{7}a} = \frac{BR}{\frac{9}{5}a} \Rightarrow \frac{9}{7}\mathrm{aBR} = \frac{2}{7}a \cdot \frac{9}{5}a \Rightarrow \frac{9}{7}BR = \frac{18}{35}a \Rightarrow \mathrm{BR} = \frac{18}{35}a \cdot \frac{7}{9} = \frac{2}{5}a$$

2. Аналогично $\Delta OBR \sim \Delta TAR$: $\frac{OB}{AT} = \frac{BR}{AR} \Rightarrow \frac{\frac{2}{7}a}{AT} = \frac{\frac{2}{5}a}{\frac{3}{5}a} \Rightarrow \frac{2}{5}aAT = \frac{6}{35}a^2 \Rightarrow \mathrm{AT} = \frac{6}{35}a \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow \mathrm{AT} = \frac{3}{7}a$

7) проведем прямую $RG \parallel AD$, G принадлежит AC.

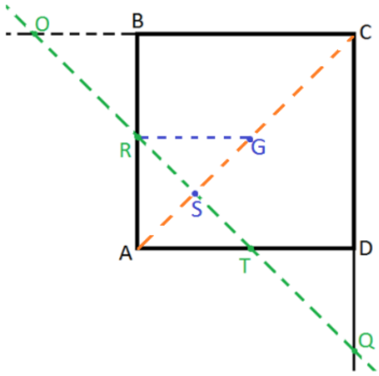



*Рисунок 3*

1. ΔARG – прямоугольный и $\angle RAG = 45^\circ \Rightarrow \Delta RAG$-равнобедренный$\Rightarrow RG = AR = \frac{3}{5}a$
2. $\frac{AG}{AC} = \frac{AR}{AB} = \frac{3}{5}$ (по теореме Фалеса)
3. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)
4. Из (2) и (3)$\Rightarrow AG = \frac{3\sqrt{2}}{5}a$
5. Рассмотрим ΔAST и ΔRSG:
   - $\angle AST = \angle RSG$ (вертикальные)

   $\angle SAT = \angle SGR$ (накрест лежащие при $RG \parallel AD$ и секущей OQ) $\Big\}$ $\Delta AST \sim \Delta RSG$

$$\Delta AST \sim \Delta GSR \Rightarrow \frac{AT}{RG} = \frac{AS}{SG} \Rightarrow \frac{\frac{3}{7}a}{\frac{3}{5}a} = \frac{AS}{AG - AS} \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{AS}{\frac{3\sqrt{2}}{5}a - AS} \Rightarrow 7AS$$

$$= 3\sqrt{2}a - 5AS \Rightarrow 12AS = 3\sqrt{2}a \Rightarrow AS = \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

8) $SC = AC - AS \Rightarrow SC = a\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}a = \frac{4a\sqrt{2} - a\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$

9) $\frac{AS}{SC} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{3\sqrt{2}}{4}a} \Rightarrow \frac{AS}{SC} = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{AS}{SC} = \frac{1}{3}$

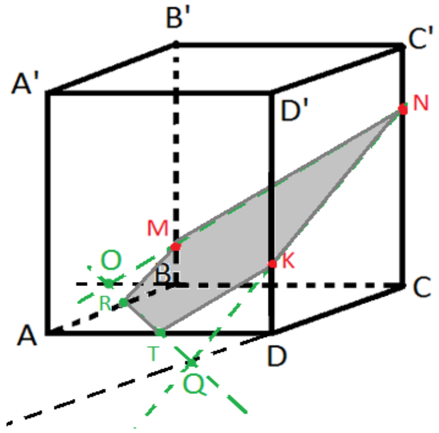
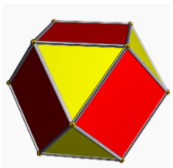
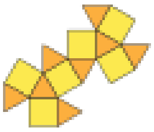
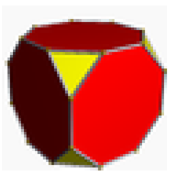
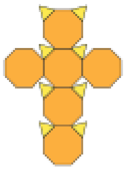
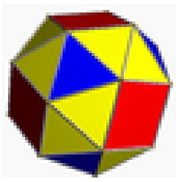
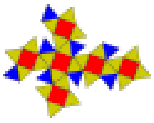
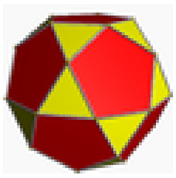
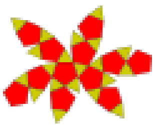
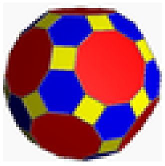
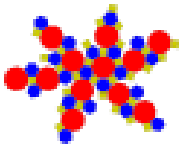
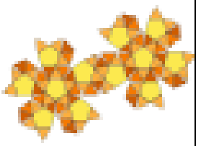



*Рисунок 4*

***Таблица 2***

**Классификация Архимедовых тел**

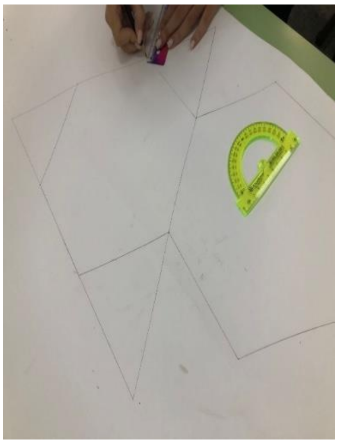
| Название | Изображение | Развёртка | Количество граней | | Количество рёбер |
|---|---|---|---|---|---|
| Кубооктаэдр (ромботетраэдр) |  |  | 14 | 8 треугольников | 24 |
| | | | | 6 квадратов | |
| Усечённый куб |  |  | 14 | 8 треугольников | 36 |
| | | | | 6 восьмиугольников | |
| Плосконосый куб (плосконосый кубоктаэдр) |  |  | 38 | 32 треугольника | 60 |
| | | | | 6 квадратов | |
| Икосододекаэдр |  |  | 32 | 20 треугольника | 60 |
| | | | | 12 пятиугольников | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ромбоусечённый икосододекаэдр |  |  | 62 | 30 квадратов<br>20 шестиугольников<br>12 десятиугольников | 180 |
| Плосконосый додекаэдр (плосконосый икосододекаэдр) |  |  | 92 | 80 треугольников<br>12 пятиугольников | 150 |

**Процесс создания кормушки и флорариума**

I. Создание прототипа:

1. Материалы: ватман, канцелярские принадлежности;
2. Процесс:
   a) Начертить развертку;
   b) Вырезать её;
   c) Собрать и склеть прототип многогранника;



*Изображение 1*

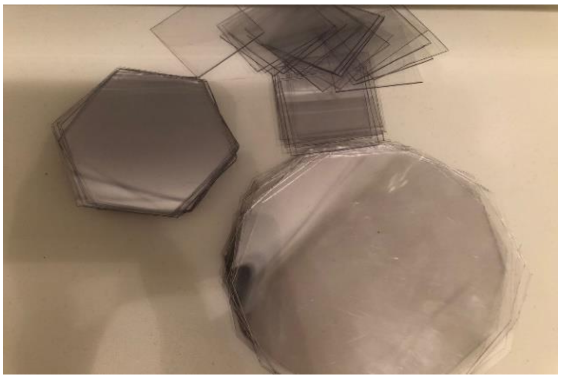
*Изображение 2*

*Изображение 3*

II. Построение основной модели:

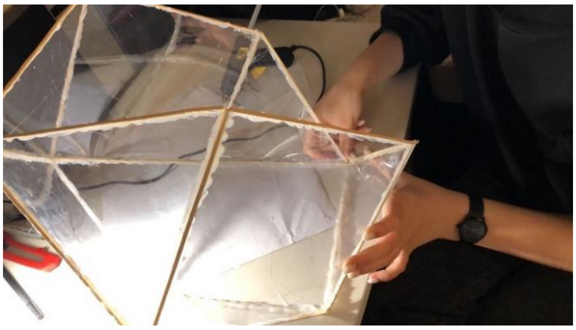
1. Материалы: Пластик, деревяные шпажки, горячий клей;
2. Процесс:
   a) Вырезать все составляющие многогранника;
   b) Разрезать шпажки на палочки нужной длины;

c) Поэтапно склеивать шпажки и геометрические фигуры, вырезанные из пластика;
d) Получаем готовый скворечник/флорариум.

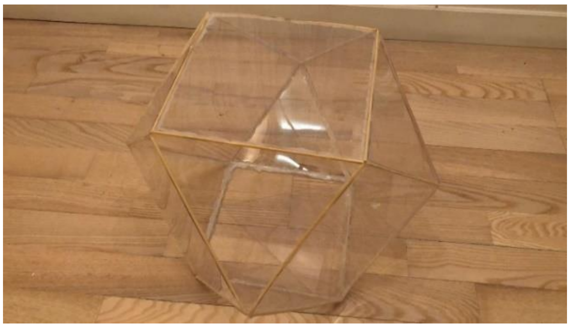


*Изображение 4*

*Изображение 5*



*Изображение 6*



*Изображение 7*

## Заключение

Построение кормушек в форме Архимедовых тел позволяет визуализировать их в качестве домиков для птиц. При условии объединения двух наук мы можем получить оптимальное решение в данной ситуации, так как можно полностью рассчитать размеры дна, летка и тому подобное, что делает нахождение птиц в кормушке более комфортным, а построение кормушки и флорариума математической задачей. Нам хотелось бы глобальнее проявить заботу о пернатых и о растениях. Таким образом, помогая птицам и растениям, можно воспитать чувство ответственности за живое на земле, развить чуткость, доброту и познавательный интерес к природе. Наши кормушки и флорариумы построены из экологически чистого пластика, который подлежит повторной переработке, что позволяет не наносить значительный ущерб природе.Во время выполнения работы мы изучили научную литературу по данной теме, которая помогла нам ознакомиться с методами нахождения и построения сечений в многогранниках и построения кормушек для птиц и флорариумов для растений.Мы самостоятельно изучили технологию построения 3D моделей с помощью интернет-ресурсов, которая включает в себя создание моделей многогранников с использованием пластика и деревянных шпажек.

Таким образом, наши цели и задачи работы выполнены.

## Список литературы


1. «Венгерские математические олимпиады» (Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани)
2. «Математика профильный уровень опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия» (Е.В. Потоскуев)
3. «Сборник задач московских математических олимпиад» (Г.И. Зубелевич)
4. «Московские математические олимпиады» (Г.А. Гальперин, А.К. Толпыго)

5. http://novijmir.blogspot.com/2013/06/blog-post_11.html
6. https://svadba-inform.ru/doc1011_1_3920.html \
7. http://www.matznanie.ru/xbookM0001/index.html?go=part-063*page.htm
8. https://shkolkovo.net/catalog/zadachi_po_stereometrii/postroenie_sechenij
9. https://sites.google.com/site/polyhedrasection2014/postroenie-secenij/sloznye-secenia-metod-sledov
10. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%85%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D1%82%D0%B5%D0%BB%D0%BE
11. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BB%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%83%D0%BC