Научно-исследовательская работа

Математика

«Лучше несколько различных способов доказательства одной теоремы, чем доказательство нескольких теорем одним способом (на примере свойства биссектрисы и её длины)»

Выполнила
Ожигова Мария Алексеевна,
ученица 9 класса
МБОУ «Технический лицей при СГУГиТ»
Россия г. Новосибирск

Руководитель
Охотина Людмила Михайловна,
учитель математики в.к.к.
МБОУ «Технический лицей при СГУГиТ»
Россия г. Новосибирск

Новосибирск 2021 г

Содержание:

Введение

Актуальность: в школьном курсе геометрии к числу основных геометрических фактов следует отнести теорему о том, что биссектриса делит противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Этот факт остался в тени у более известных теорем и в первую очередь потому, что в большинстве учебников он находится в ряду задач.

Но повсеместно встречаются задачи, которые гораздо легче решить, если знать этот факт о биссектрисе. Так, например, ещё Архимед пользовался теоремой о биссектрисе, которая делит основание на части, пропорциональные боковым сторонам, для того, чтобы определить длины полустороны 12-угольника, 24-угольника и т. д.

Я заинтересовалась этим фактом. Данная теорема интересна тем, что ее доказательств существует много. Я решила в своей работе показать некоторые варианты доказательства этой теоремы.

Целью работы является рассмотрение нескольких способов доказательства свойства биссектрисы и формул её длины, применение свойства биссектрисы и формулы длины биссектрисы при решении задач ГИА.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Рассмотреть доказательства свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника несколькими способами.
2. Рассмотреть несколько формул для вычисления длины биссектрисы. Вывод одной из них
3. На примерах задач из ГИА показать применение этих теоретических знаний для решения конкретных задач.

Объект исследования: свойство биссектрисы и формула её длины, задачи ГИА.

Предметом исследования является разработанный подход решения задач ГИА с использованием этого свойства биссектрисы и формулы длины биссектрисы.

Методы исследования: поисковый, метод обобщения и специализации.

Работа состоит из трех глав. В первой главе приведены доказательства свойств биссектрисы, во второй главе показаны формулы для вычисления длины биссектрисы. Доказана одна из них. В третьей главе представлены примеры решения задач ГИА на свойство биссектрисы и применение формулы длины биссектрисы.

1. Свойство биссектрисы

Этим уникальным свойством биссектрисы можно воспользоваться при решении многих задач в ГИА. Но данную теорему и формулу вычисления длины биссектрисы обошли в нашей образовательной программе. Поэтому мне стало интересно изучить эти факты и научиться применять их на практике.

В учебнике «Геометрия 7-9» автора Л.С. Атанасян и в других [1-5] это свойство формируется в виде задачи на доказательство. Считаю полезным запомнить его как теорему.

Теорема: биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам [1].

Данную теорему можно доказать разными способами. Далее я приведу примеры некоторых из них.

Доказательство 1 (через подобие треугольников).

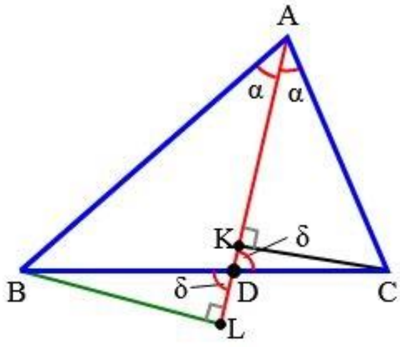


Рис.1

Дано: треугольник ABC, АД-биссектриса.

Доказать: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

Доказательство:

Рассмотрим треугольник *ABC*. Из точки *A* проведена биссектриса *AD* (рис.1). Проведем перпендикуляры из вершин *B* и *C* на луч *AD* и обозначим точки пересечения через *L* и *K*.

Рассмотрим треугольники *ABL* и *ACK*. Эти треугольники подобны по двум углам (∠ALB=∠AKC=90º, ∠BAL=∠CAK по условию). Тогда имеем:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BL}{CK} \qquad (1)$$

Рассмотрим треугольники *BLD* и *CKD*. Они также подобны поскольку ∠BLD=∠CKD=90º, ∠BDL=∠CDK равны как вертикальные. Тогда имеем:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BL}{CK} \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$, ч.т.д.

Доказательство 2 (метод площадей).

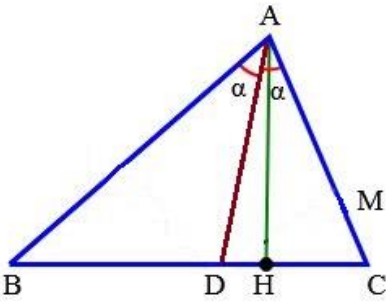


Рис.2

Дано: треугольник ABC; AD – биссектриса.

Доказать: $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

Доказательство:

Построим высоту AH треугольника ABC (рис.2). Найдем площади треугольников *ABD* и *ACD*:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AH \cdot BD \qquad (3)$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AH \cdot CD \qquad (4)$$

Тогда построим следующее отношение:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BD}{\frac{1}{2} AH \cdot CD} = \frac{BD}{CD} \qquad (5)$$

С другой стороны, площадь треугольников *ABD* и *ACD* можно найти, используя следующую формулу $S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin\alpha \qquad (6)$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot AC \sin\alpha \qquad (7)$$

Используя формулы (6) и (7) получим:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin\alpha}{\frac{1}{2} AD \cdot AC \sin\alpha} = \frac{AB}{AC} \qquad (8)$$

Из формул (5) и (8) получим $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$, ч.т.д.

Доказательство 3 (через теорему синусов).

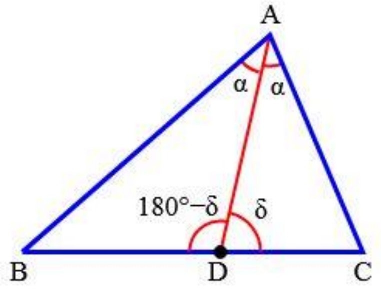


Рис.3

Дано: треугольник ABC, АД- биссектриса.

Доказать: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

Доказательство:

Рассмотрим треугольник ABC. Из точки *A* проведем биссектрису *AD* (Рис.3): Применяя теорему синусов для треугольников *ABD* и *ACD* можем записать:

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \delta)} = \frac{BD}{\sin\alpha}, \qquad (9)$$

$$\frac{AC}{\sin\delta} = \frac{CD}{\sin\alpha}. \qquad (10)$$

Поделив (9) на (10), получим:

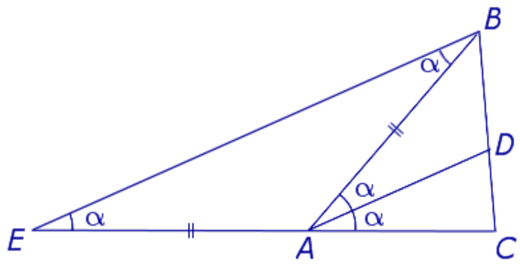
$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \delta)} : \frac{AC}{\sin\delta} = \frac{\sin\delta}{\sin(180^\circ - \delta)} = 1$. Следовательно, $\frac{AB}{AC} = 1$. (11)

$\frac{BD}{\sin\alpha} : \frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{BD}{CD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1$. Следовательно, $\frac{BD}{CD} = 1$. (12)

Из равенств (11) и (12) получаем:

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, ч.т.д.

Доказательство 4 (через теорему Фалеса)



Дано: треугольник ABC, АД- биссектриса.

Доказать:

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

Доказательство.

Докажем, что отрезки *AB* и *AE* равны. Проведем через точку B прямую, параллельную биссектрисе AD. Обозначим точку пересечения построенных прямых буквой E. $\angle EBA = \angle BAD$, т.к. эти углы внутренние накрест лежащие при параллельных прямых EB и AD и секущей ВА.

$\angle BEA = \angle DAC$, т. к. эти углы являются соответственными при параллельных прямых EB и AD и секущей ЕС. Следовательно, $\angle EBA = \angle BEA$, откуда следует, что $\triangle EAB$ является равнобедренным и $AB = AE$.

И, воспользовавшись теоремой Фалеса, получаем:

$$\frac{EA}{AC} = \frac{BD}{DC} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC},$$

ч.т.д.

2. Длина биссектрисы

Рассмотрим треугольник на рис.4.

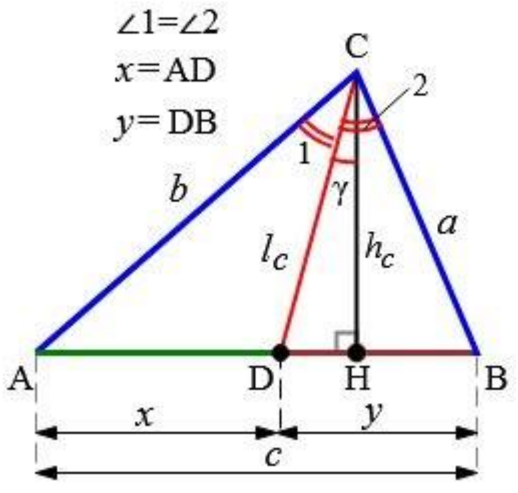


Рис. 4

Длину биссектрисы треугольника можно вычислить используя формулы:

1) $l_c = \sqrt{ab - xy}$,

2) $l_c = \dfrac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$,

3) $l_c = \dfrac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$,

4) $l_c = \dfrac{2ab\cos\frac{c}{2}}{a+b}$,

5) $l_c = \dfrac{h_c}{\cos\gamma}$,

где p – полупериметр треугольника ABC, γ– угол между биссектрисой lc и высотой hc:

$$p=\frac{a+b+c}{2},\quad \gamma=\frac{\angle B-\angle A}{2}$$

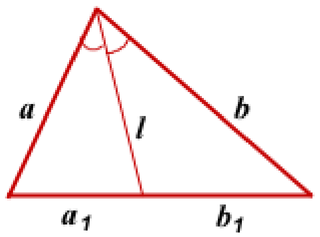


Рис. 5

Рассмотрим формулу (1). Мне она пригодится для решения задач (см. дальше).

Квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением двух его сторон и произведением отрезков, на которые эта биссектриса делит третью сторону.

Соответственно, длина биссектрисы равна квадратному корню из разности между произведением двух его сторон и произведением отрезков, на которые эта биссектриса делит третью сторону.

$l^2=ab-a_1b_1$ (рис. 5)

$l=\sqrt{ab-a_1b_1}$

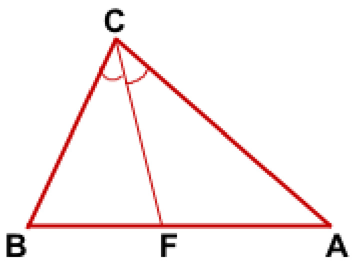


Рис. 6

Дано:

ΔABC,

CF — биссектриса $\angle ABC$ (рис. 6)

Доказать:

$CF^2=BC\cdot AC-BF\cdot AF.$

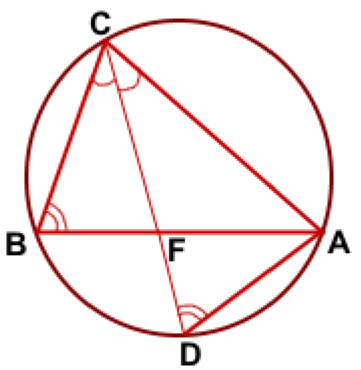


Рис. 7

Доказательство:

Опишем около треугольника ABC окружность и продлим биссектрису CF до пересечения с окружностью в точке D (рис.7). Соединим точки A и D отрезком.

Рассмотрим треугольники BCF и DCA.

$\angle BCF=\angle DCA$ (по условию);

$\angle CBF=\angle CDA$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AC).

Значит, треугольники BFC и DCA подобны (по двум углам).

Из подобия треугольников следует пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{BC}{CD} = \frac{CF}{AC}, \Rightarrow CD = \frac{BC \cdot AC}{CF}.$$

$$FD = CD - CF = \frac{BC \cdot AC}{CF} - CF.$$

По свойству пересекающихся хорд

$$BF \cdot AF = CF \cdot FD$$

Отсюда

$$BF \cdot AF = CF \cdot (\frac{BC \cdot AC}{CF} - CF)$$

$$BF \cdot AF = BC \cdot AC - CF^2$$

$CF^2 = BC \cdot AC - BF \cdot AF$. ч.т.д.

3. Примеры задач из ГИА на свойство биссектрисы и длину биссектрисы

Примеры задач ГИА на свойство биссектрисы

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены высоты BT и AF. Они пересекаются в точке K. Известно, что AB=15, AK=5.Найдите S_{ABK}.

Решение:

1) т.к. высота BT является биссектрисой угла B, то BK – биссектриса угла B в треугольнике ABF. По свойству биссектрисы :

$\frac{АК}{KF} = \frac{АВ}{BF} => \frac{KF}{BF} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

2) Пусть KF=x, тогда BF=3x , AF=5+x.

Из ABF : $AB^2 = BF^2 + AF^2$, где $AF = АК + KF$

$225 = (3x)^2 + (5 + x)^2 => x^2 + x - 20 = 0 =>$

Следовательно, BF=$3 \cdot 4 = 12$

3) $S_{АБК} = \frac{1}{2} AK \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$

Ответ: $S_{АБК} = 30$

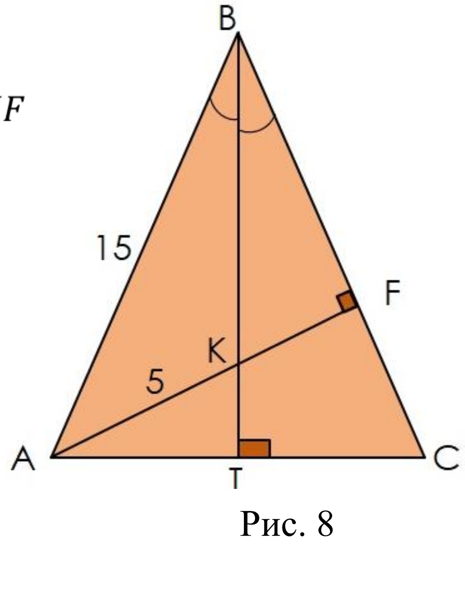


Рис. 8

2. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, а боковая сторона равна 10 $\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты CP и AM соответственно, пересекающиеся в точке K. Найти S_{CKM}.

1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot sinC \Rightarrow sinC = \frac{2S_{ABC}}{AC \cdot BC} = \frac{2 \cdot 90}{(10\sqrt{3})^2} = \frac{3}{5}$

2) В ACM: $AM = AC \cdot sinC \Rightarrow AM = 10\sqrt{3} \cdot \frac{3}{5} = 6\sqrt{3}$

$CM^2 = AC^2 - AM^2 \Rightarrow CM = 8\sqrt{3}$

3) CP – биссектриса угла C=>CK – биссектриса угла C в ACM, тогда

$\frac{AK}{KM} = \frac{AC}{CM} = \frac{10\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{5}{4} \Rightarrow AK = 5x, KM = 4x \Rightarrow 9x = 6\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{\;}$

$KM = 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

4) $S_{CKM} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = 32$

Ответ: $S_{CKM} = 32$

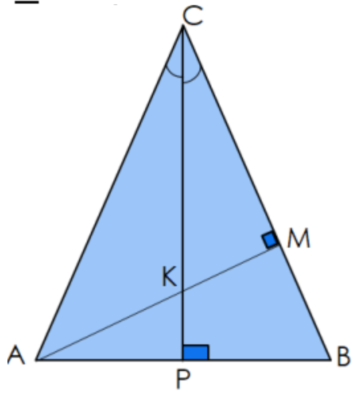


Рис. 9

3. Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна $12\sqrt{2}$,а $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

1) т.к. диагональ ромба является биссектрисой его угла, то ВД – биссектриса угла B, а значит BK – биссектриса угла B в MBC.
2) В MBC: $sin\, B = \frac{CM}{CB} \Rightarrow CM = BC \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

3) $S_{ромба} = AB \cdot CM = BC \cdot CM \Rightarrow 12\sqrt{2} = BC \cdot BC \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow BC^2 \cdot \frac{2}{3} = 12$

$BC^2 = 18 \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}; CM = 4$

4) По свойству биссектрисы угла треугольника MBC:

$\frac{MK}{KC} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{MK}{KC} = cosB = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$

$\frac{MK}{KC} = \frac{1}{3}$ и $MK + KC = 4$, то $CK = 3$

Ответ: $CK = 3$

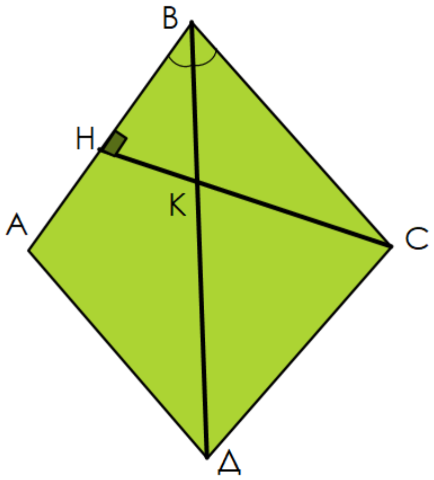


Рис. 10

Примеры задач на формулу длины биссектрисы.

1. Дан треугольник со сторонами 4;8;9. Найдите длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.
   Решение.
   Найти ВД(рис.11).

1) $\frac{4}{8} = \frac{АД}{ДС} => \frac{1}{2} = \frac{АД}{ДС}$ =>АД=x; ДС=2x

Х+2x=9 =>x=3 и АД=3; ДС=6

2) $ВД^2 = АВ \cdot ВС - АД \cdot ДС$

$ВД^2 = 4 \cdot 8 - 3 \cdot 6 = 32 - 18 = 14$

ВД=$\sqrt{14}$

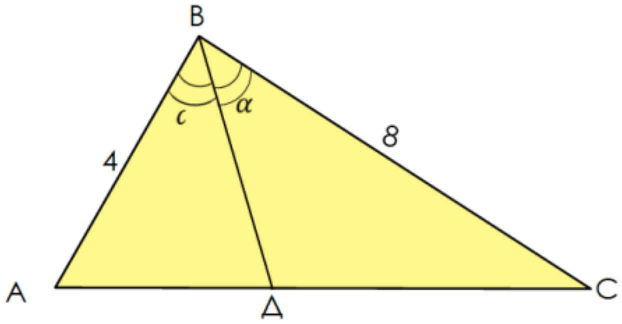


Рис.11

Ответ: $\sqrt{14}$

2.В прямоугольном ⊿ ABC гипотенуза BC = 20,
катет AB = 16.
Найдите расстояние от вершины A
до биссектрисы угла C(рис.12).

Решение.

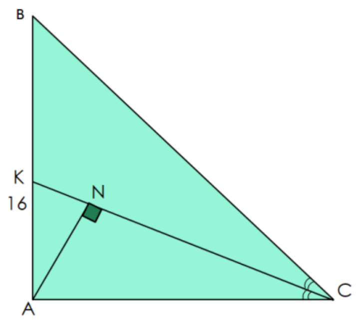


Рис. 12

Биссектриса СК, AN$\perp CK$

Искомый отрезок AN

1) $AC = \sqrt{BC^2 - BA^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$

2) По свойству биссектрисы:

$\frac{BC}{AC} = \frac{BK}{AK} \Rightarrow \frac{BK}{AK} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow$ BK=5x; AK=3x

5x+3x=16 =>x=2 =>BK=10, AK=6

3) Длина биссектрисы:

$CK^2 = BC \cdot AC - BK \cdot AK$

$CK^2 = 20 \cdot 12 - 10 \cdot 6 = 180 \Rightarrow CK = 6\sqrt{5}$

4) AN - ?

$\frac{1}{2}AK \cdot AC = \frac{1}{2}AN \cdot KC \Rightarrow AN = \frac{AK \cdot AC}{KC} = \frac{6 \cdot 12}{6 \cdot \sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2{,}4\sqrt{5}$

Ответ: $2{,}4\sqrt{5}$

Таким образом, в ходе работы я изучила несколько способов доказательства интересного свойства биссектрисы и познакомилась с несколькими формулами её длины, а также научилась решать задачи с помощью этой теории.

Заключение.

К основным результатам работы можно отнести следующее:

1. Рассмотрела доказательство (несколькими способами) свойства биссектрис внутренних углов треугольника.
2. Рассмотрела формулы для вычисления длины биссектрисы. Одну с доказательством.
3. На примерах задач из ГИА показала применение этих теоретических знаний для решения конкретных задач.

В ходе работы я изучила новое свойство биссектрисы и формулу её длины, а также научилась решать задачи с помощью этой теории. При этом я воспользовалась теми знаниями, которые ещё предстоит изучать: теорема синусов; площадь треугольника через синус угла; формулы приведения. Я считаю, что те знания, которые я приобрела, готовя эту работу, пригодятся мне в дальнейшей учебе.

Научная новизна заключается в разработанном подходе применения данного свойства биссектрисы и формулы её длины.

Практическая значимость. Выполненная мною работа может использоваться другими учениками на уроках математики, на занятиях кружка, в методике преподавания геометрии в школе, при решении задач ГИА.

Вывод. Я считаю, что поставленную перед собой цель я достигла. Данная тема актуальна, так как в математике **лучше знать несколько различных**

способов доказательства одной теоремы, чем доказательства нескольких теорем одним способом.

Список литературы

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия, 7-9: Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2016. – 383 с.
2. Теорема о биссектрисе треугольника. Доказательство. - URL: https://matworld.ru/geometry/teorema-o-bissektrise.php (дата обращения: 20.11.2021).
3. Биссектриса — что это такое, свойства биссектрисы угла треугольника. https://ktonanovenkogo.ru/voprosy-i-otvety/bissektrisa-chto-ehto-takoe-svojstva-bissektrisy-ugla-treugolnika.html (дата обращения: 20.11.2021).
4. Проект "Биссектриса знакомая и не очень". https://multiurok.ru/index.php/files/proekt-bissektrisa-znakomaia-i-ne-ochen.html (дата обращения: 20.11.2021).
5. Реферат на тему Несколько интересных фактов о биссектрисе. https://infourok.ru/referat_na_temu_neskolko_interesnyh_faktov_o_bissektrise-507058.htm (дата обращения: 20.11.2021).