**Научно-исследовательская работа**

Математика

# «Исследование и построение графиков целой и дробной части числа»

Выполнила
**Смирнова Надежда Александровна,**
ученица10 класса
МБОУ «Технический лицей при СГУГиТ»
Россия г. Новосибирск

Руководитель:
**Охотина Людмила Михайловна,**
учитель математики в.к.к.
МБОУ «Технический лицей при СГУГиТ»
Россия г. Новосибирск

Новосибирск 2021

## Содержание

# Введение

Тема моего проекта - исследование и построение графиков функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$. Проблема заключается в том, что во многих олимпиадах по математике встречаются задачи, содержащие целую и дробную части, которые нельзя решить, не уделяя внимание изучению этих понятий.

Эта тема является актуальной, поскольку она не предусмотрена школьной программой, т. к. все школьники изучают математику, но не многие знакомы с этим вопросом. Моим сверстникам было бы полезно и интересно так же, как и мне, узнать об этом подробнее.

Целью работы является исследование и построение графиков функций целой и дробной частей числа.

Для того, чтобы достичь поставленную цель, нужно выполнить ряд задач:

1. Изучить основную теорию.
2. Построить графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ и рассмотреть их свойства.
3. Научиться строить более сложные графики, содержащие целую и дробную части числа.
4. Применение знаний по теме для решения уравнений.

# 1. Понятие целой и дробной части числа

Чтобы понять тему, нужно, в первую очередь, изучить теорию.

<u>*Определение:*</u> целой частью действительного числа $x$ называется наибольшее число $n$, не превосходящее $x$. Понятие целой части числа было введено немецким математиком Иоганном Карлом Фридрихом Гауссом.

Целая часть числа $x$ обозначается символом $[x]$ или $E(x)$ (от французского слова Entier («антье» – целый). Функция же целой части числа была введена Адриеном Мари Лежандром.

<u>*Например:*</u> [2,3] = 2; [-2,3] = -3; [2] = 2; [-3] = -3.

Если $n \leq x < n + 1$, а $n$ – целое, то $[x] < 1$.

Число $x – [x]$ называют дробной частью числа и обозначают $\{x\}$.

Итак, $0 \leq \{x\} < 1$. Тогда $x = [x] + \{x\}$ (любое число равно сумме целой и дробной частей) [2, с. 6] .

На основе этих данных можно построить графики:

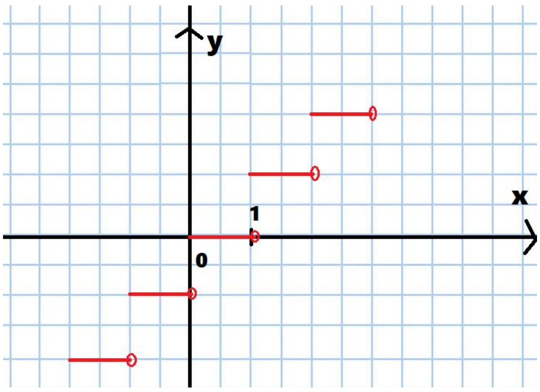


Рисунок 1 - график функции $y = [x]$

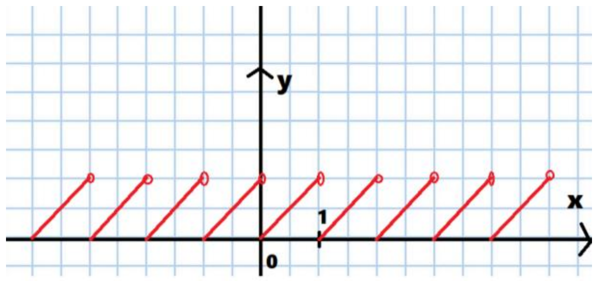


Рисунок 2 - график функции $y = \{x\}$

Таблица 1 – Свойства графиков функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$

| Свойства $y = [x]$ | Свойства $y = \{x\}$ |
|---|---|
| $D([x]) = R$ | $D(\{x\}) = R$ |
| $E([x]) = Z$ | $E(\{x\}) = [0; 1)$ |
| кусочно-постоянная неубывающая | кусочно-линейная, кусочно-возрастающая, интервалами линейности и возрастания являются $[n; n + 1)$, где $n \in Z$ |
| четность, нечетность, периодичность отсутствуют | является периодической с периодом 1 |
| | четность и нечетность отсутствуют |

С дробной частью тесно связана еще одно функция:у $= \{\{x\}\}$ – расстояние от $x$ до ближайшего целого числа. Эта функция, в отличие от дробной части, непрерывна [4, с. 36].

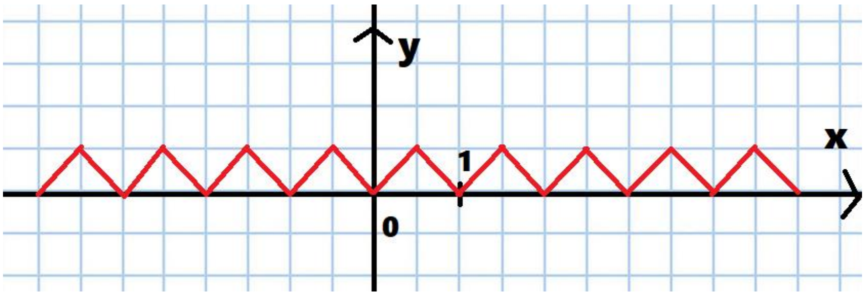


Рисунок 3 – график функции у $= \{\{x\}\}$

## Некоторые свойства целой части числа

$1^0$ Если $p$ – целое число, то $[x \pm p] = [x] \pm p$.

*Доказательство*. Пусть $x = k + \alpha$, где $k = [x]$, а $\alpha = \{x\}$, где $0 \le \alpha < 1$, тогда $[x \pm p] = [k + \alpha \pm p] = [k \pm p + \alpha] = [k \pm p] = k \pm p = [x] \pm p$.

$2^0$ Если $x$ – любое действительное число, то $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$.

*Доказательство*. Пусть $x = k + \alpha$, где $k = [x]$, $0 \le \alpha < 1$, тогда, используя свойство $1^0$, имеем:

$[2x] = [2k + 2\alpha] = 2k + [2\alpha]$,

$$[x] = [k + \alpha] = k,$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[k + \alpha + \frac{1}{2}\right] = k + \left[\alpha + \frac{1}{2}\right].$$

Остается доказать, что $[2\alpha] = \left[\alpha + \frac{1}{2}\right]$, причем $0 \le \alpha < 1$.

Если $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$, то $[2\alpha] = 0, \left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = 0$.

Если $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$, то $[2\alpha] = 1, \left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = 1$ [1, с. 15].

## 2. Пол и потолок числа

Пол числа $x$ – это наименьшее число, не превышающее $x$, то есть то же самое, что и целая часть числа. Поэтому график $y = \lfloor x \rfloor$ полностью совпадает с графиком $y = [x]$. Эти обозначения, как и названия „пол“ и „потолок" были введены в обиход Кеннетом Э. Айверсоном в начале 60-х годов [3, с. 88].

Потолок числа – это наименьшее число, не меньшее $x$. Например, $\lceil 3{,}4 \rceil = 4$; $\lceil 1{,}6 \rceil = 2$.

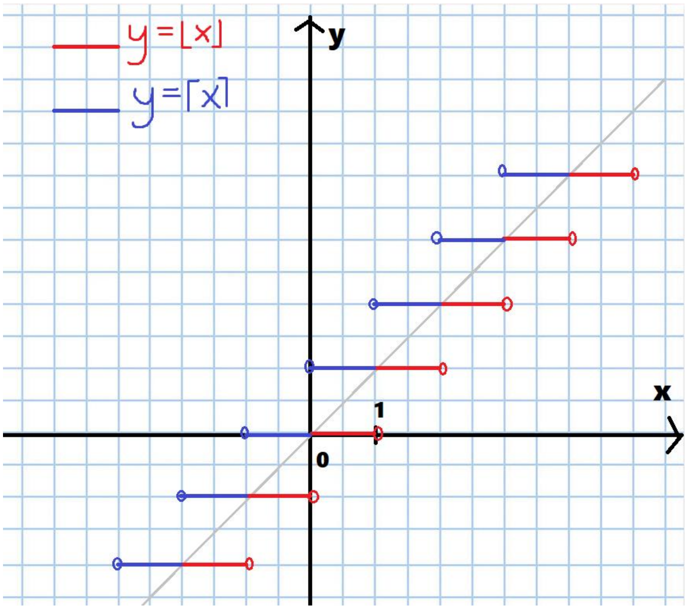


Рисунок 4 – графики функций $y = \lfloor x \rfloor$ и $y = \lceil x \rceil$

Из графика видно, что обе функции в целых точках совпадают. А если они не совпадают, то потолок ровно на 1 выше пола: $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = [x -$ не целое$]$.

Если же сдвинуть диагональную линию вниз на единицу, то она целиком окажется под функцией пол. Получаем неравенство, где $m = \lfloor x \rfloor$, $n = \lceil x \rceil$: $x - 1 < m \leq x \leq n < x + 1$.

Данные функции являются отражениями друг друга относительно обеих осей: $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$; $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ [3, с. 89].

### Свойства

Могут быть полезны следующие правила:

$\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1$

$\lfloor x \rfloor = n \iff x - 1 < n \leq x$

$\lceil x \rceil = n \iff n - 1 < x \leq n$

$\lceil x \rceil = n \iff x \leq n < x + 1$

Целочисленное слагаемое можно вносить и выносить в/за скобки пола или потолка: $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, n – целое число.

Имеется много случаев, когда скобки пола и потолка излишни и их можно либо вставлять, либо удалять — как нам угодно. Так, любое неравенство между вещественными и целыми числами равносильно неравенству с полом или потолком между целыми числами [3, с. 90]:

x $< n \iff \lfloor x \rfloor < n$

$n < x \iff n < \lceil x \rceil$

$x \leq n \iff \lceil x \rceil \leq n$

$n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor$ .

## 3. Построение графиков функций

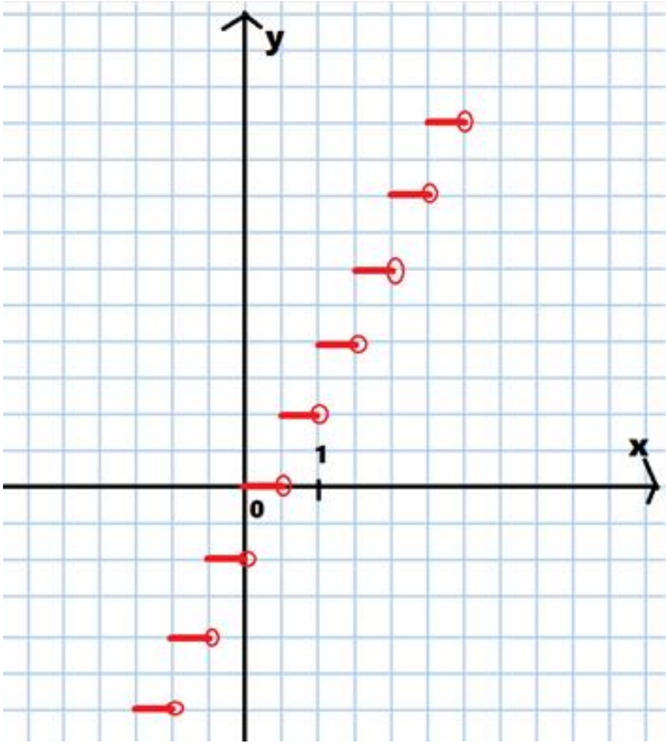


Рисунок 5 – график функции $y = [2x]$

Этот график отличается от $y = [x]$ тем, что происходит сжатие вдоль оси $OX$ в 2 раза

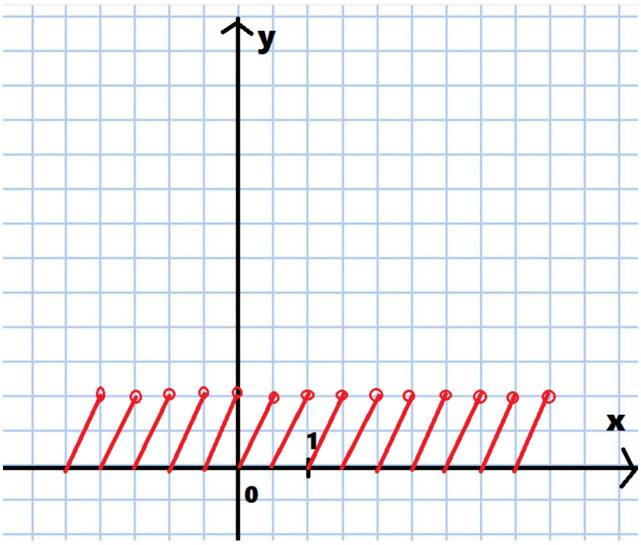


Рисунок 6 – график функции $y = \{2x\}$

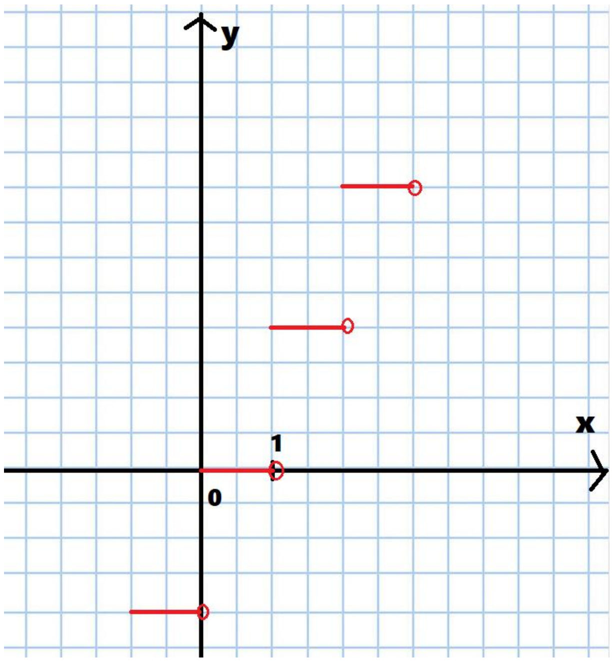


Рисунок 7 – график функции $y = 2[x]$

Этот график отличается от $y = [x]$ тем, что происходит растяжение вдоль оси $OY$ в 2 раза

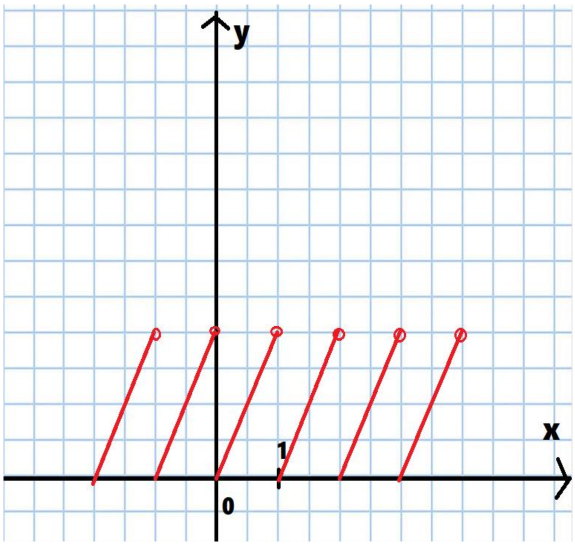


Рисунок 8 – график функции $y = 2\{x\}$

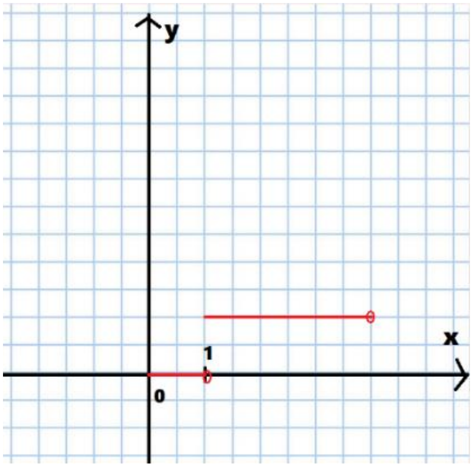


Рисунок 9 – график функции $y = \sqrt{[x]}$

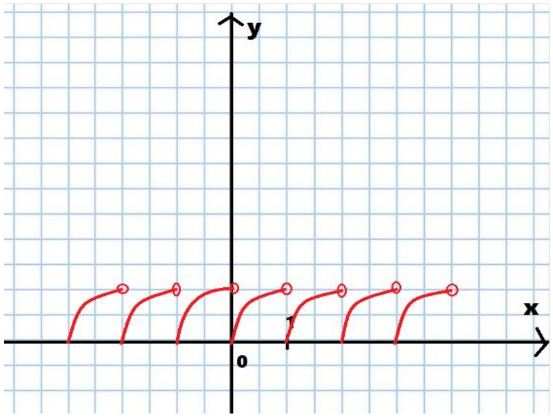


Рисунок 10 – график функции $y = \sqrt{\{x\}}$

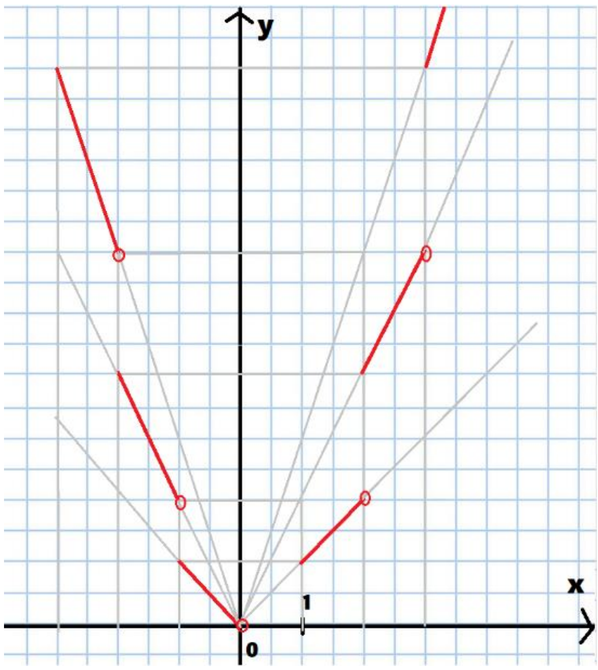


Рисунок 11 – график функции $y = x[x]$

Если $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$, $y = 0$.
Если $1 \leq x < 2$, то $[x] = 1$, $y = x$.
Если $2 \leq x < 3$, то $[x] = 2$, $y = 2x$.
Если $3 \leq x < 4$, то $[x] = 3$, $y = 3x$ и т.д.
Если $-1 \leq x < 0$, то $[x] = -1$, $y = -x$.
Если $-2 \leq x < -1$, то $[x] = -2$, $y = -2x$.
Если $-3 \leq x < -2$, то $[x] = -3$, $y = -3x$ и т.д.

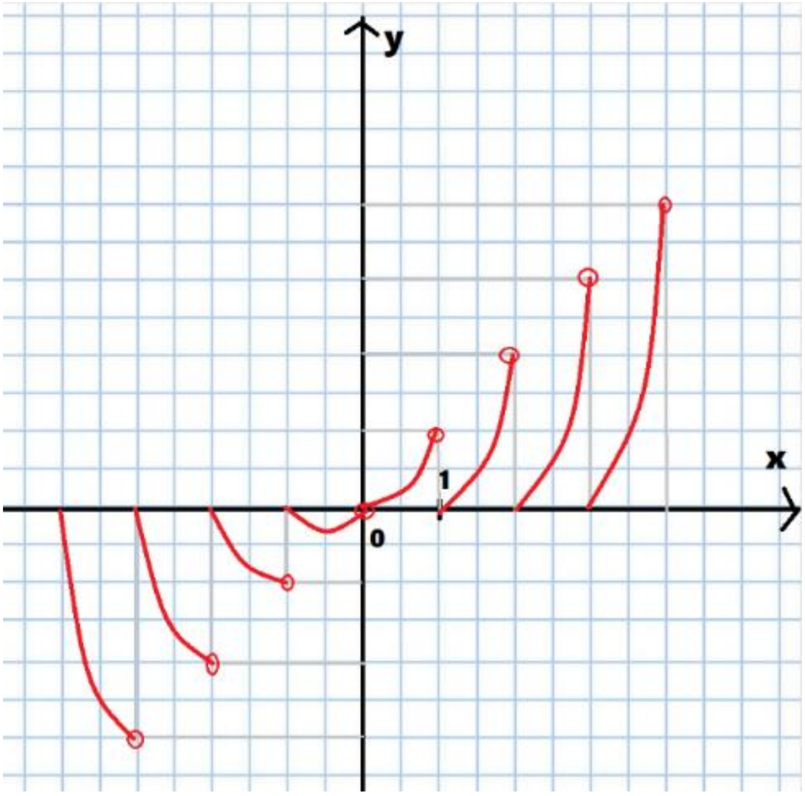


Рисунок 12 – график функции $y = x\{x\}$

Если $0 \leq x < 1$, то $\{x\} = x - [x] = x$, $y = x^2$
Если $1 \leq x < 2$, то $\{x\} = x - [x] = x - 1$, $y = x^2 - x$
Если $2 \leq x < 3$, то $\{x\} = x - [x] = x - 2$, $y = x^2 - 2x$
Если $3 \leq x < 4$, то $\{x\} = x - [x] = x - 3$, $y = x^2 - 3x$ и т.д
Если $-1 \leq x < 0$, то $\{x\} = x - [x] = x + 1$, $y = x^2 + x$
Если $-2 \leq x < -1$, то $\{x\}= x - [x] = x + 2$, $y = x^2 + 2x$
Если $-3 \leq x < -2$, то $\{x\} = x - [x] = x + 3$, $y = x^2 + 3x$ и т.д.

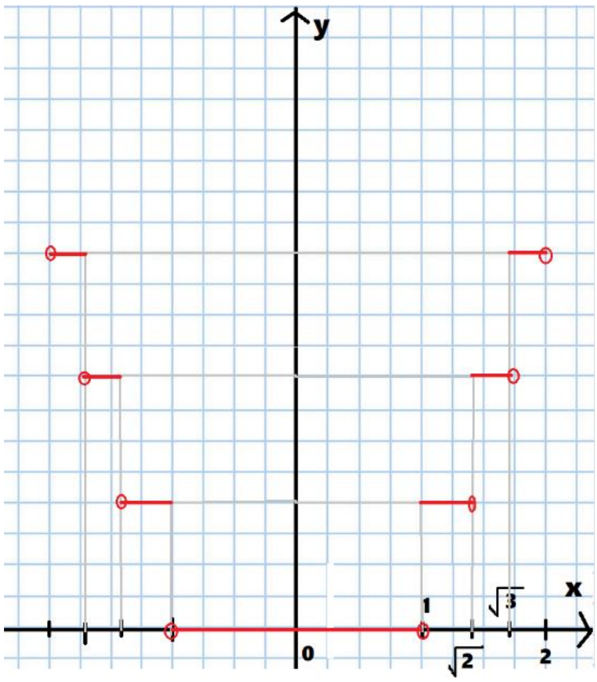


Рисунок 13 – график функции $y = [x^2]$

Если $x^2 < 1$, т.е. $-1 < x < 1$, то $[x^2] = 0$, $y = 0$.
Если $1 \leq x^2 < 2$, т.е. $-\sqrt{2} < x \leq -1$ и $1 \leq x < \sqrt{2}$, то $[x^2] = 1$, $y = 1$.
Если $2 \leq x^2 < 3$, т.е. $-\sqrt{3} < x \leq -\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$, то $[x^2] = 2$, $y = 2$.
Если $3 \leq x^2 < 4$, т.е. $-2 < x \leq -\sqrt{3}$ и $\sqrt{3} \leq x < 2$, то $[x^2] = 3$, $y = 3$ и т.д.

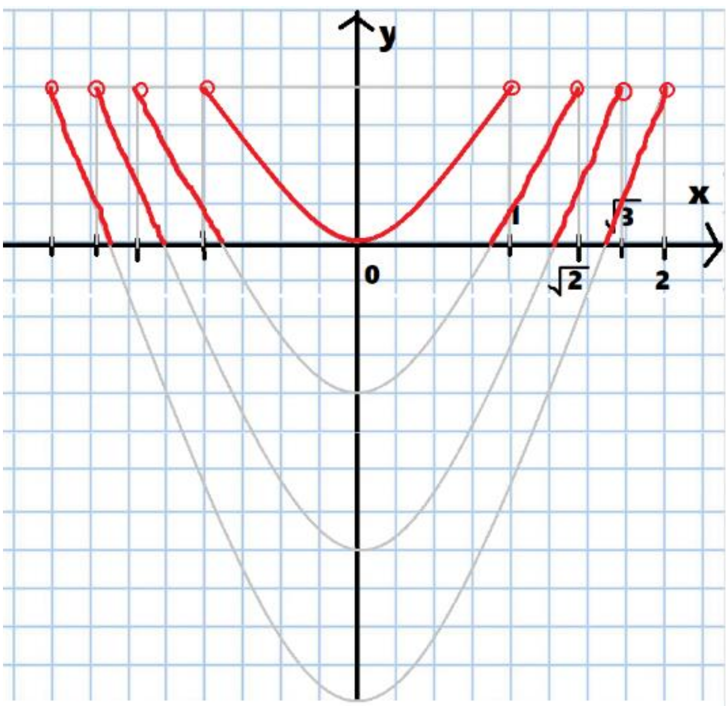


Рисунок 14 – график функции $y = \{x^2\}$

Если $x^2 < 1$, т.е. $-1 < x < 1$, то $[x^2] = 0$, а $\{x^2\} = x^2 - [x^2]$, $y = x^2$.
Если $1 \leq x^2 < 2$, т.е. $-\sqrt{2} < x \leq -1$ и $1 \leq x < \sqrt{2}$, то $[x^2] = 1$, $y = x^2 - 1$.
Если $2 \leq x^2 < 3$, т.е. $-\sqrt{3} < x \leq -\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$, то $[x^2] = 2$, $y = x^2 - 2$ и т.д.
Известно, что $0 \leq \{x\} < 1$, поэтому $0 \leq y < 1$.

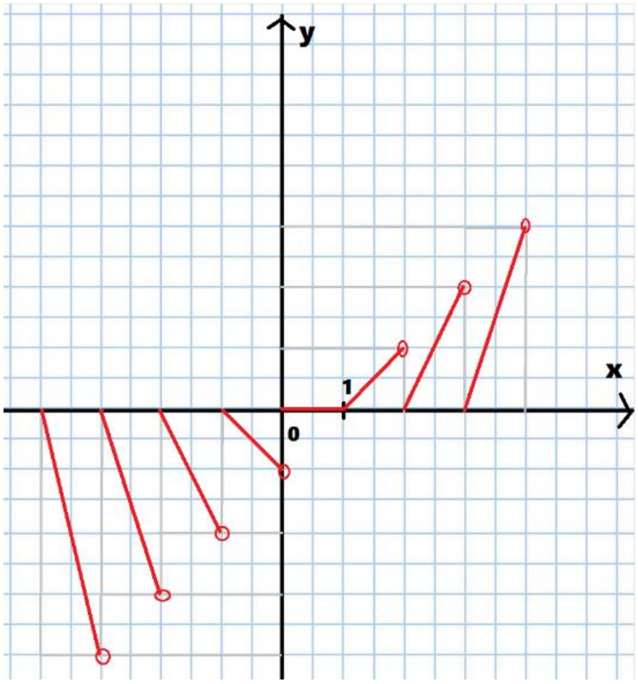


Рисунок 15 – график функции $y = [x]\{x\}$

Если $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$, $y = 0$.
Если $1 \leq x < 2$, то $[x] = 1$, $y = \{x\} = x - 1$.
Если $2 \leq x < 3$, то $[x] = 2$, $y = 2\{x\} = 2x - 4$.
Если $3 \leq x < 4$, то $[x] = 3$, $y = 3\{x\} = 3x - 6$.
Если $-1 \leq x < 0$, то $[x] = -1$, $y = -\{x\} = -x - 1$.
Если $-2 \leq x < -1$, то $[x] = -2$, $y = -2\{x\} = -2x - 4$
Если $-3 \leq x < -2$, то $[x] = -3$, $y = -3\{x\} = -3x - 9$.

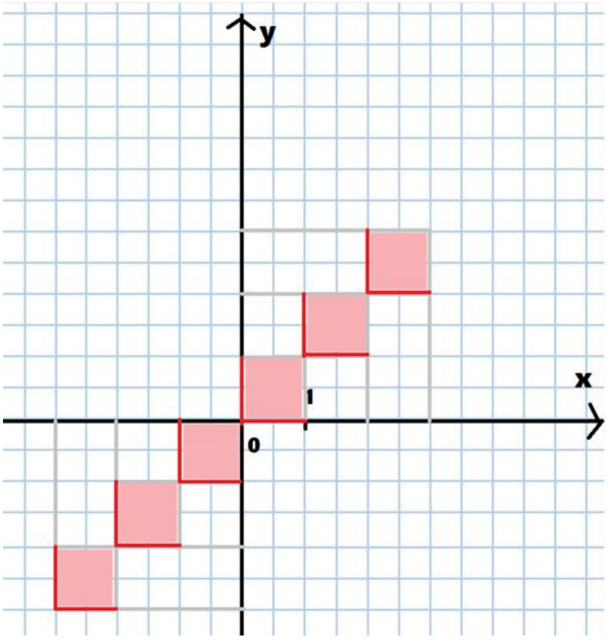


Рисунок 16 – график функции $[y] = [x]$

Если $0 \leq y < 1$, то $[y] = 0$. Значит, $[x] = 0$ и $0 \leq x < 1$.

Получим систему неравенств $\begin{cases} 0 \leq y < 1 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$

Решением системы является пересечение полосы $0 \leq y < 1$ и полосы $0 \leq x < 1$.

Если $1 \leq y < 2$, то $[y] = 1$ и $[x] = 1$ т.е. $1 \leq x < 2$. Тоже получим систему уравнений $\begin{cases} 1 \leq y < 2 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$

Решением данной системы также является пересечение двух полос.

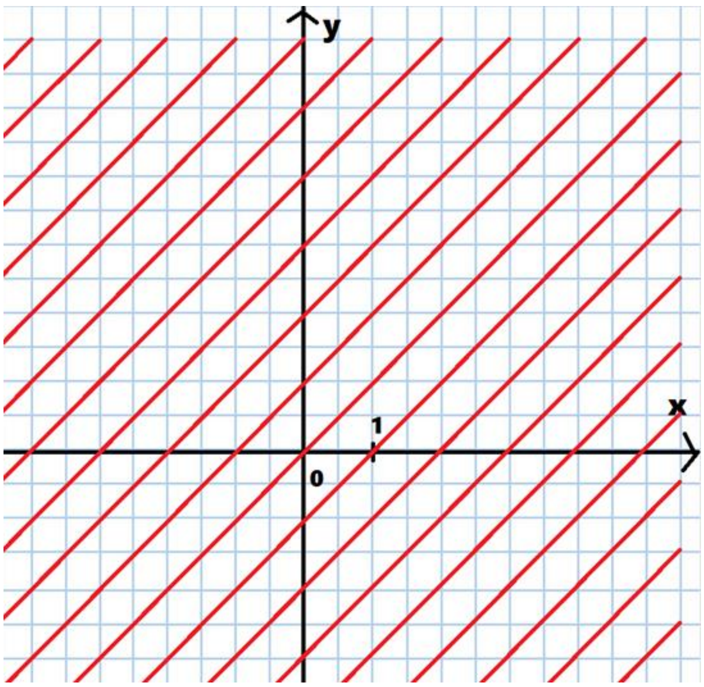


Рисунок 17 – график функции $\{y\} = \{x\}$

Построим график, учитывая, что $\{y\} = y - [y]$.
Если $0 \le y < 1$, то $[y] = 0$, $\{y\} = y$, т.е. $y = \{x\}$, график которой известно.
Если $1 \le y < 2$, то $[y] = 1$, $\{y\} = y - 1$, т.е. $y = \{x\} + 1$
Если $2 \le y < 3$, то $[y] = 2$, $\{y\} = y - 2$, т.е. $y = \{x\} + 2$ и т.д.
Если $-1 \le y < 0$, то $[y] = -1$, $\{y\} = y + 1$, т.е. $y = \{x\} - 1$
Если $-2 \le y < -1$, то $[y] = -2$, $\{y\} = y + 2$, т.е. $y = \{x\} - 2$ и т.д.

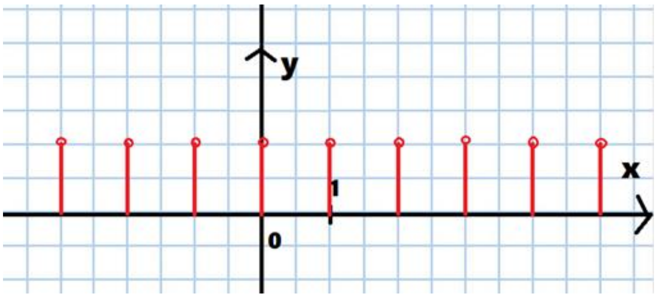


Рисунок 18 – график функции $[y] = \{x\}$

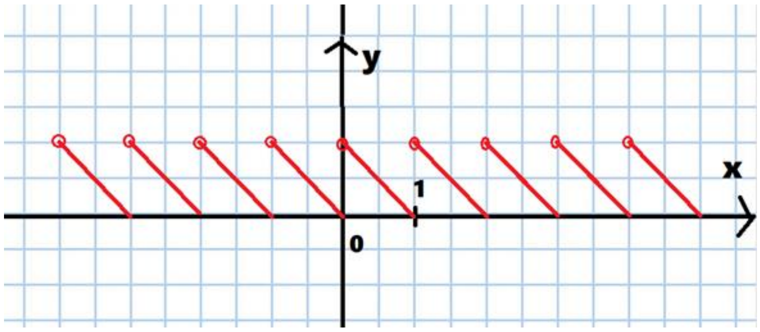


Рисунок 19 – график функции $y = \{-x\}$

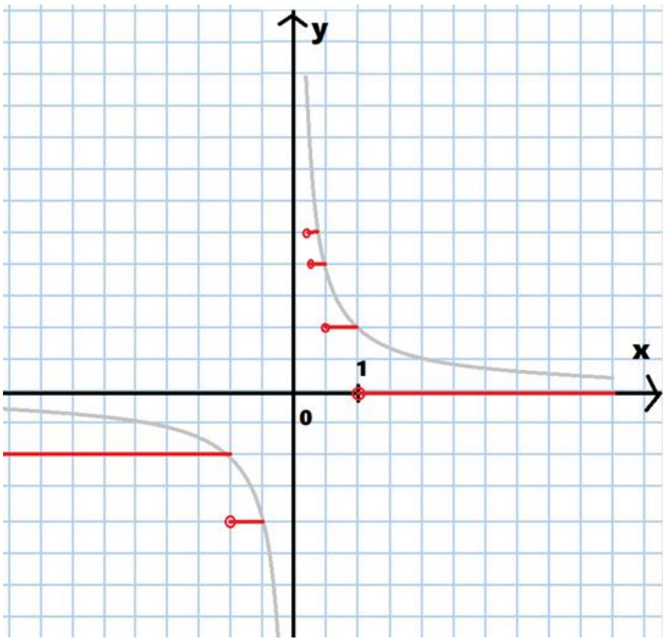


Рисунок 20 – график функции $y = \left[\frac{1}{x}\right]$

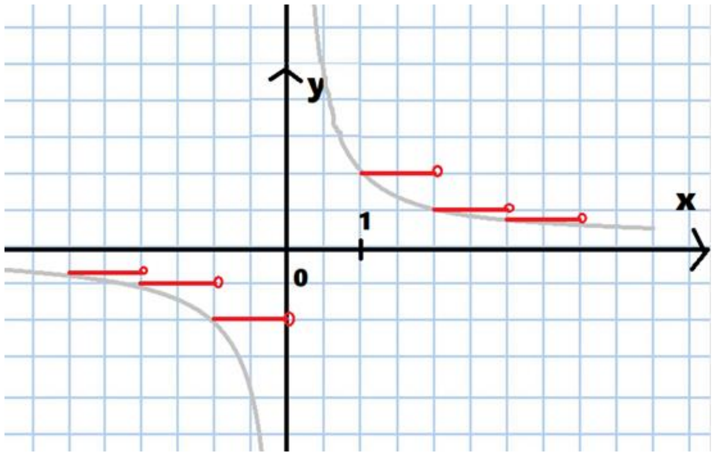


Рисунок 21 – график функции $y = \frac{1}{[x]}$

## 4. Решение уравнений графическим способом

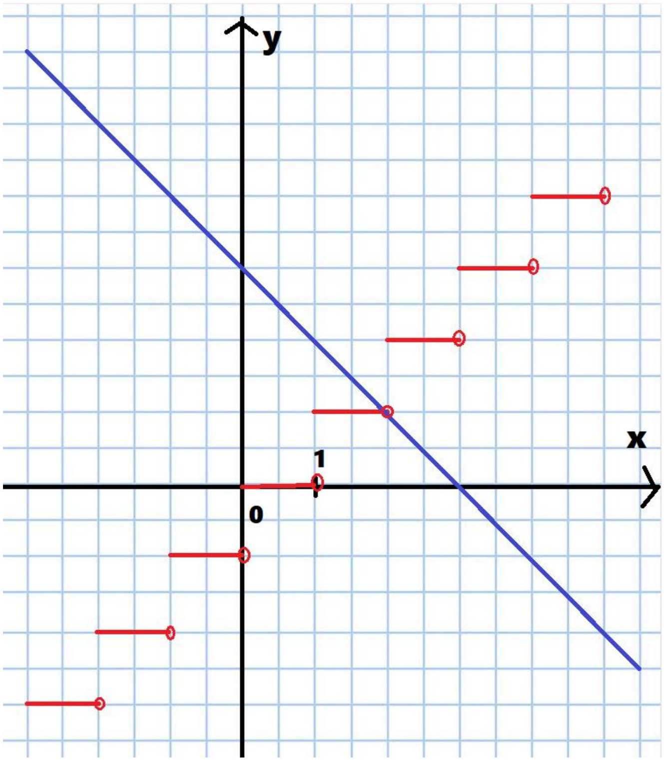


Рисунок 22 – графическое решение уравнения $3 - x = [x]$

Решений нет.

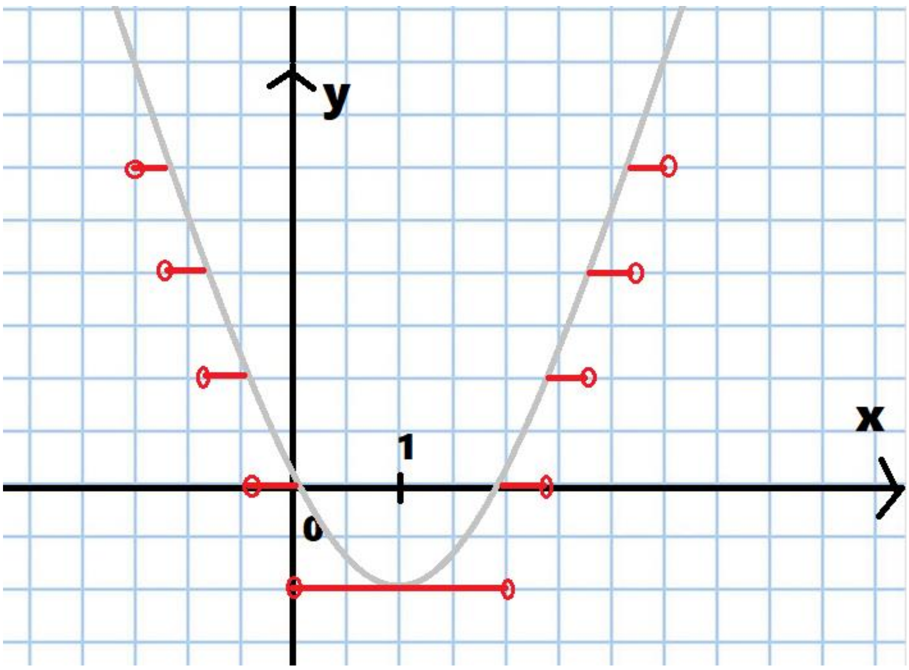


Рисунок 23 – графическое решение уравнения $y = [x^2 - 2x]$

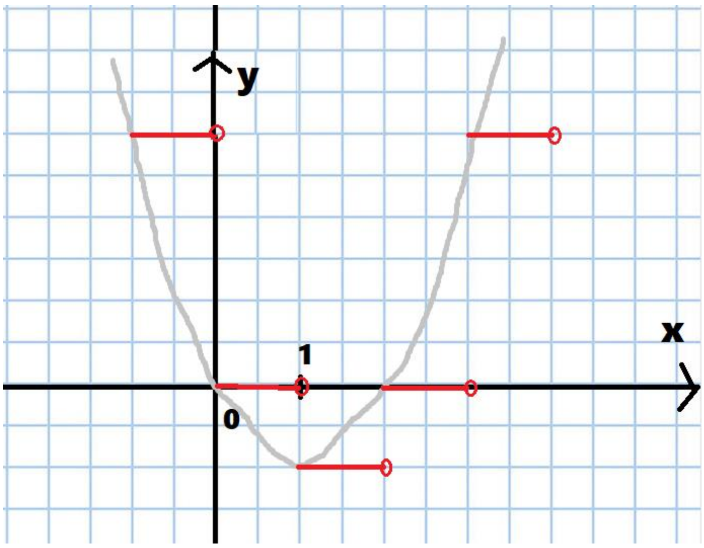


Рисунок 24 – графическое решение уравнения y = $[x]^2 - 2x$

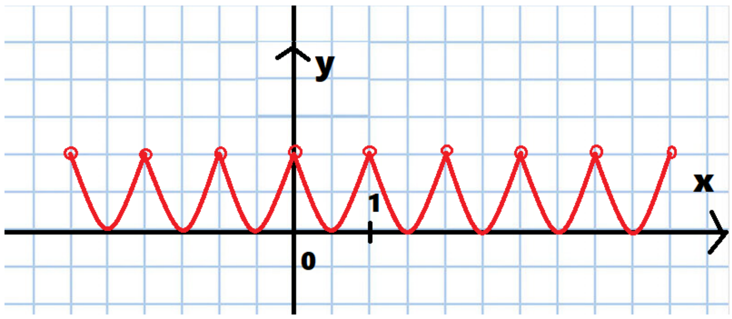


Рисунок 25 – графическое решения уравнения y = $(2\{x\} - 1)^2$

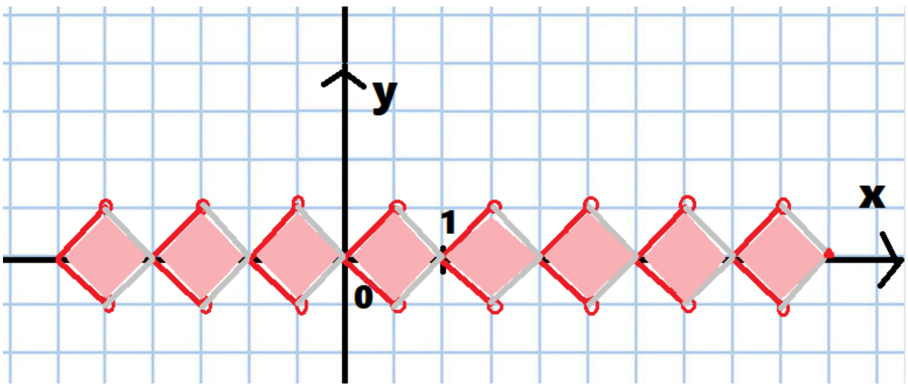


Рисунок 26 – графическое решение системы уравнений $\begin{cases}[x + y] = a\\ [x - y] = a\end{cases}$

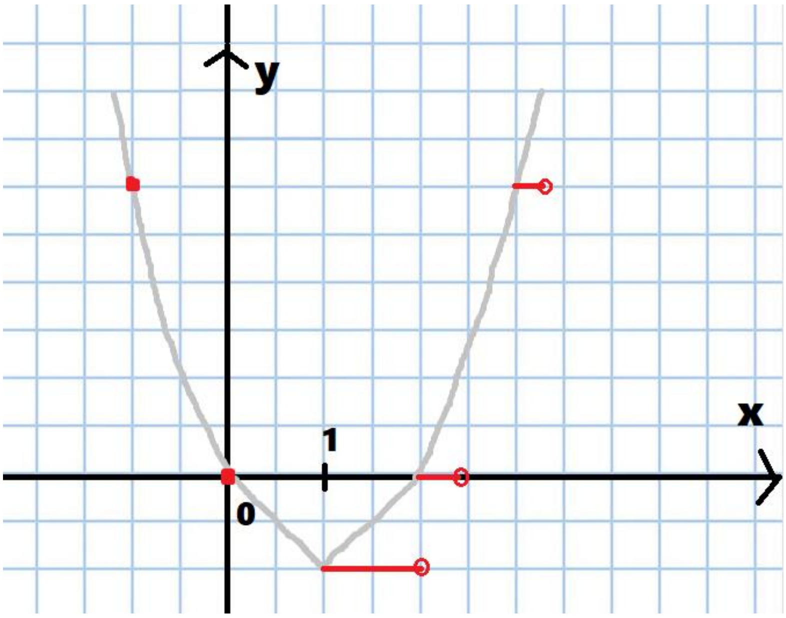


Рисунок 27 – графическое решение уравнения $[x^2 – 2x] = [x]^2 – 2x$

$x^2 + \{x\} = -x$
Так как $\{x\} = x – [x]$, то уравнение можно переписать в виде $x^2 + x – [x] = -x$ или $x^2 + 2x = [x]$, значит, $(x + 1)^2 – 1 = [x]$. Решением являются точки пересечения графиков функций $y = (x + 1)^2 - 1$ и $y = [x]$.

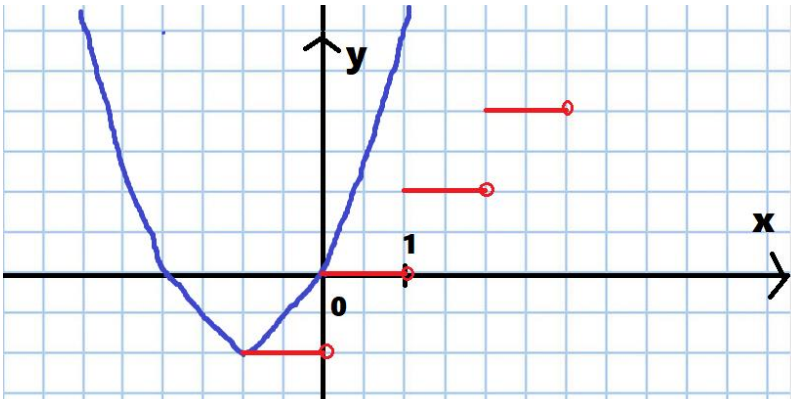


Рисунок 28 – графическое решение уравнения $x^2 + \{x\} = -x$

Ответ: $x = 0$; $x = -1$.

При каких значениях параметра $a$ система с двумя неизвестными не имеет более 2 решений? [5, с. 258]

$$\begin{cases} [x] = [y] \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

Решение.
Именно два пересечения возможно, когда красный квадрат проходит через точки с координатами $(n; n)$, где $n \in Z$. Следовательно, $a$ – четное положительное число.

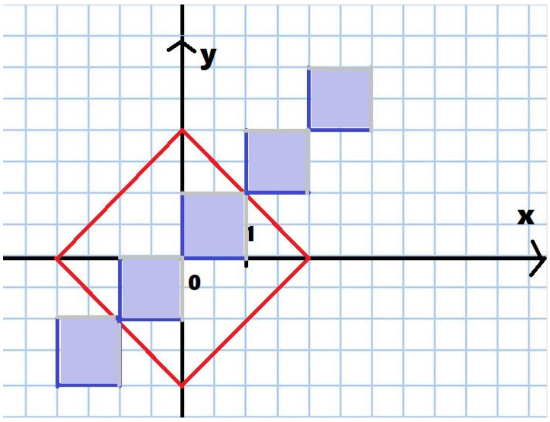


Рисунок 29 - система $\begin{cases} [x] = [y] \\ |x| + |y| = a \end{cases}$

Ответ: $a = 2n$, где $n \in N$.

## 5. Применение знаний к решению уравнения

а) Решить уравнение

$\sqrt{x} = \sqrt{[x]} + \sqrt{x}$

б) Выбрать корни, принадлежащие отрезку $\left[tg\frac{\pi}{12}; tg\frac{5\pi}{12}\right]$.

Решение.

а) О. Д. З.: $x \geq 0$.

Т. к. обе части уравнения неотрицательны, то возведем обе части уравнения в квадрат:

$x = [x] + 2\sqrt{[x]\{x\}} + \{x\}$

$x = [x] + 2\sqrt{[x]\{x\}} + x - [x]$

$2\sqrt{[x]\{x\}} = 0$

$\left[\begin{array}{l}[x] = 0\\ \{x\} = 0\end{array}\right. => \left[\begin{array}{l}x \in [0; 1]\\ x - [x] = 0\end{array}\right. => \left[\begin{array}{l}x \in [0; 1)\\ x = [x]\end{array}\right. => \left[\begin{array}{l}x \in [0; 1)\\ x \in N\end{array}\right.$

б) $tg\frac{\pi}{12} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\frac{\pi}{6}}{1+cos\frac{\pi}{6}}}$

Т. к. $\frac{\pi}{12} \in$ I четверти, то $\mathrm{tg}\frac{\pi}{12} > 0$

$$tg\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$tg\frac{5\pi}{12} = tg\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{6}}{1 - tg\frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{3-1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{2} = 2+\sqrt{3}$$

Т. е. должно: $x \in \left[2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right]$

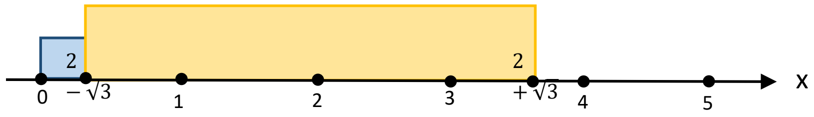


Рисунок 30 - $x \in \left[2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right]$

$1 < \sqrt{3} < \sqrt{4}$
$1 < \sqrt{3} < 2$
$3 < 2 + \sqrt{3} < 4$
$-2 < -\sqrt{3} < -1$
$0 < 2 - \sqrt{3} < 1$

Ответ: а) $x \in [0;\ 1)$ или $x \in N$;
б) $x \in \left[2 - \sqrt{3}; 1\right] \cup \{2; 3\}$.

## Заключение

Было достаточно интересно разбираться в новой для себя теме.

В результате мне удалось выполнить все поставленные в начале работы задачи:

1) изучена основная теория;
2) построены графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ и рассмотрены их свойства;
3) изучены построения более сложных графиков, содержащих целую и дробную части числа.

Я приобрела множество полезных знаний и умений из проделанной работы. Я знаю о графиках функций немного больше.

# Список литературы

1. Алексеева В., Ускова Н. Задачи, содержащие целую и дробную части числа// Математика. 1997. №17
2. Андреев А. А., А. И. Люлев, А. Н. Савин «Антье»
3. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. «Конкретная математика»
4. Журнал «Квант», А. Егоров Целая и дробная части числа. 2002, №5
5. Семенов И. Л. «Антье и мантисса».