

Научно-исследовательская работа

Математика

«Задачи на расположение корней квадратного трехчлена»

Выполнил

Евсюков Михаил Дмитриевич,
учащийся 9 класса
МБОУ «Технический лицей при СГУГиТ»
Россия г. Новосибирск

Руководитель

Охотина Людмила Михайловна,
учитель математики в.к.к.
МБОУ «Технический лицей при СГУГиТ»
Россия г. Новосибирск

Новосибирск 2021 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Расположение корней квадратного уравнения.....	4
1.1 Теоремы о расположении корней.....	5
1.2 Необходимые и достаточные условия расположения корней квадратного трехчлена.....	11
2. Практическая часть.....	12
Заключение.....	16
Список литературы.....	17

ВВЕДЕНИЕ

Математика является одним из обязательных предметов ОГЭ и ЕГЭ. Данная тема позволяет успешно решать задания повышенной сложности.

В экзаменационных заданиях очень часто встречаются задачи, в которых необходимо знать от чего зависит расположение корней квадратного трёхчлена. Знание рассмотренного далее материала значительно облегчает решение таких задач. Чем и объясняется *актуальность* темы.

Проблемой моей работы стало отсутствие рассматриваемой темы в школьной программе по математике.

Целью работы является разработка подхода решения задач, требующих знания ситуаций расположения корней квадратного уравнения.

Задачи данной работы следующие:

- 1) рассмотреть теоремы о расположении корней квадратного трёхчлена;
- 2) обосновать необходимые и достаточные условия расположения корней квадратного трёхчлена;
- 3) выполнить сбор задач по каждой теореме;
- 4) проанализировать решения задач на расположение корней квадратного трёхчлена.

Объектом исследования работы является квадратный трёхчлен.

Предмет исследования: разработанный подход решения задач на расположение корней квадратного трёхчлена.

Методы исследования в данной работе были применены следующие: поисковый, анализ и синтез.

Работа состоит из двух глав: теоретической и практической.

1. РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе приняты следующие обозначения: x_1 и x_2 , – корни квадратного трехчлена $f(x)$, $x_1 \leq x_2$, D – дискриминант $f(x)$, x_B – координата вершины параболы, являющейся графиком $f(x)$.

Перед началом работы также следует повторить основные понятия.

Квадратным трехчленом называется выражение: $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ [2]. Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх при $a > 0$, вниз при $a < 0$. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – числа (здесь и далее во всех рассматриваемых примерах действует условие $a \neq 0$) называется квадратным уравнением [2].

Параметр – некая скрытая постоянная. Координата x_B находится по формуле $x_B = \frac{-b}{2a}$.

Дискриминант квадратного трехчлена находится по формуле [2]

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D < 0$, то данное уравнение не имеет действительных корней.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных различных корня, а график функции $f(x)$ пересекает ось Ox в двух точках: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Если $D = 0$, то график функции касается оси Ox , а уравнение имеет два совпадающих корня: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Решение большинства задач с параметром, в которых необходимо провести исследование квадратного трехчлена, сводится к определению необходимых и достаточных условий реализации одного или нескольких из рассматриваемых далее условий.

1.1 Теоремы о расположении корней

Теоремы о расположении корней квадратного трехчлена не входят непосредственно ни в школьную программу по математике, ни в программу для поступающих в ВУЗы [1], поэтому выпускник или абитуриент, пользуясь ими, вообще говоря, должен уметь их доказывать. В то же время, обоснование теорем о расположении корней квадратного трехчлена строится на элементарных фактах школьной математики. Приведу доказательства семи теорем [4].

Теорема 1 (оба корня уравнения больше некоторого числа n)

Чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были больше некоторого числа n , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a \cdot f(n) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_B > n; \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация. Чтобы парабола (см. рис. 1, 2) – график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ – пересекала ось OX в точках $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$, лежащих правее точки $(n; 0)$, необходимо и достаточно выполнения трех условий:

1. вершина параболы – либо лежит в нижней полуплоскости, либо в верхней полуплоскости, либо на оси OX (условие $D \geq 0$);
2. ось симметрии параболы – прямая $x_B = \frac{-b}{2a}$ – лежит правее прямой $x=n$ (условие: $x_B > n$);
3. парабола пересекается с прямой $x = n$ в точке, лежащей в верхней полуплоскости при $a > 0$ и в точке, лежащей в нижней полуплоскости, при $a < 0$ (условие: $a \cdot f(n) > 0$).

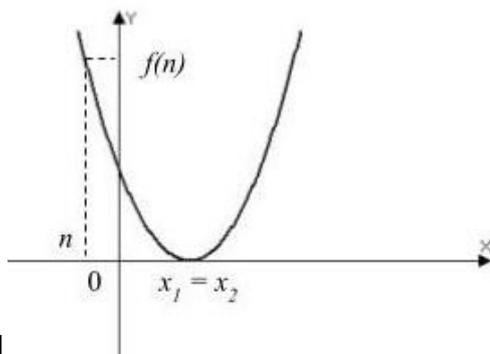


Рис.1

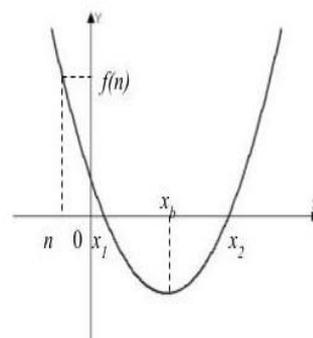


Рис.2

Доказательство теоремы

Достаточность: так как $D \geq 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня: x_1 и x_2 ; пусть $x_1 \leq x_2$. Так как вершина параболы расположена между корнями трёхчлена, т.е. $x_1 \leq x_B \leq x_2$, и, по условию, $n < x_B$, то

$n < x_B \leq x_1$. Воспользуемся теоремой о разложении квадратного трёхчлена на множители и запишем значение трёхчлена в точке n , учтем при этом условие $f(n) > 0$ и уже доказанное неравенство $x_2 > n$:

$$f(n) = a \cdot (n - x_1) \cdot (n - x_2).$$

Сравнение знаков левой и правой частей этого неравенства приводит нас к выводу, что выполнено неравенство $n - x_1 < 0$, т.е. $x_1 > n$.

Необходимость. Так как трёхчлен имеет два корня, то дискриминанте $D \geq 0$.

Так как $x_1 > n$ и $x_2 > n$, то $x_1 + x_2 > 2n$, поэтому

$$x_B = \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{2n}{2} = n.$$

По теореме о разложении на линейные множители, с учетом известных по условию знаков, получим: $f(n) = a \cdot (n-x_1) \cdot (n-x_2)$, из которой следует, что $f(n) > 0$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 2 (оба корня уравнения меньше некоторого числа n)

Чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x)$ были меньше некоторого числа m , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot f(m) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_B < m; \end{array} \right.$$

Доказательство теоремы.

Достаточность: так как $D \geq 0$, то квадратный трехчлен имеет два корня: x_1 и x_2 ; пусть $x_1 \leq x_2$.

Так как вершина параболы расположена между корнями трехчлена, т.е. $x_1 \leq x_B \leq x_2$, и, по условию, $m > x_B$, то $x_1 < x_B \leq m$. Воспользуемся теоремой о разложении квадратного трехчлена на множители и запишем значение трехчлена в точке m , учтём при этом условие $f(m) > 0$ и уже доказанное неравенство $x_2 < m$:

$$f(m) = a \cdot (m - x_1) \cdot (m - x_2).$$

Сравнение знаков левой и правой частей этого неравенства приводит к выводу, что выполнено неравенство $m - x_1 > 0$, т.е. $m > x_1$.

Необходимость. Так как трехчлен имеет два корня, то $D \geq 0$. Так как $m > x_2$ и $m > x_1$, то $x_1 + x_2 < 2m$, поэтому

$$x_B = \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{2m}{2} = m.$$

По теореме о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители, с учётом известных по условию знаков, получим:

$$f(m) = a \cdot (m-x_1) \cdot (m-x_2), \text{ из которой следует, что } f(m) > 0.$$

Что и требовалось доказать.

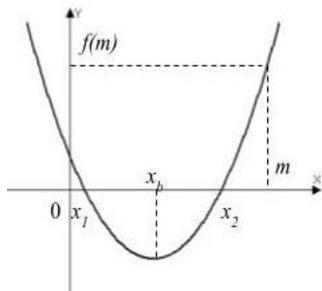


Рис.3

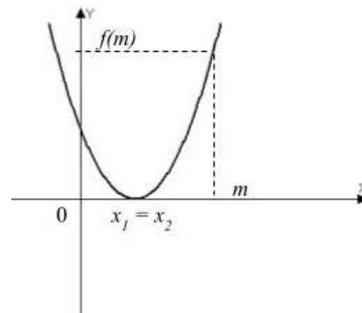
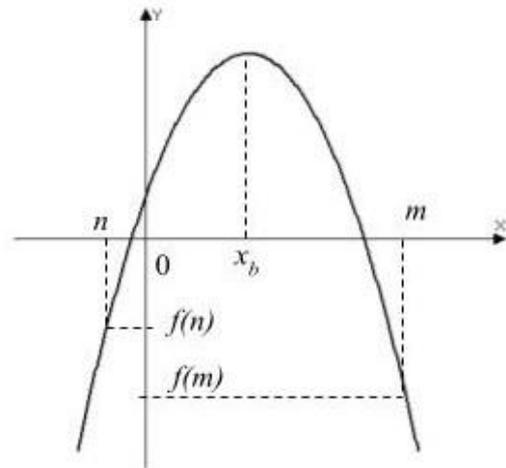
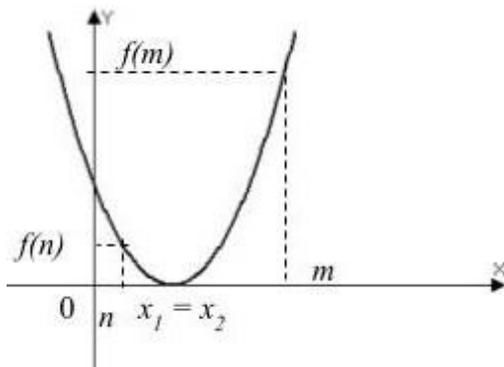


Рис.4

Теорема 3 (оба корня уравнения принадлежат промежутку (n, m))

Чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x)$ принадлежали заданному промежутку $(n; m)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot f(n) > 0, \\ a \cdot f(m) > 0, \\ D \geq 0, \\ n < x_B < m; \end{array} \right.$$



Доказательство этой и дальнейших теорем опираются на доказательства двух предыдущих, поэтому рассматриваться не будут.

Теорема 4 (меньший корень принадлежит промежутку (n, m))

Чтобы только меньший корень квадратного трехчлена $f(x)$ принадлежал заданному промежутку $(n; m)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot f(n) > 0, \\ a \cdot f(m) < 0, \\ D > 0; \end{array} \right.$$

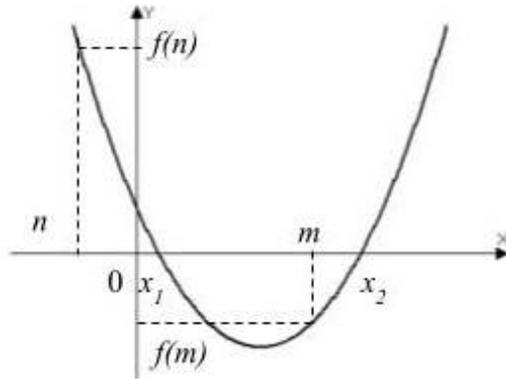


Рис. 7

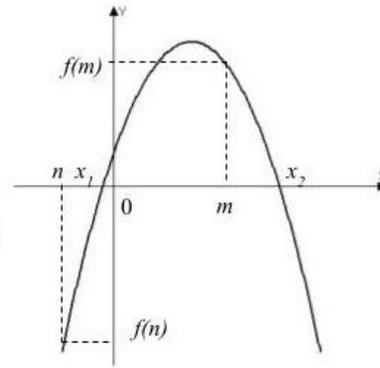


Рис.8

Теорема 5 (большой корень принадлежит промежутку (n, m))

Чтобы только большой корень квадратного трехчлена $f(x)$ принадлежал заданному промежутку $(n; m)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left[\begin{array}{l} a \cdot f(n) < 0, \\ a \cdot f(m) > 0, \\ D > 0; \end{array} \right.$$

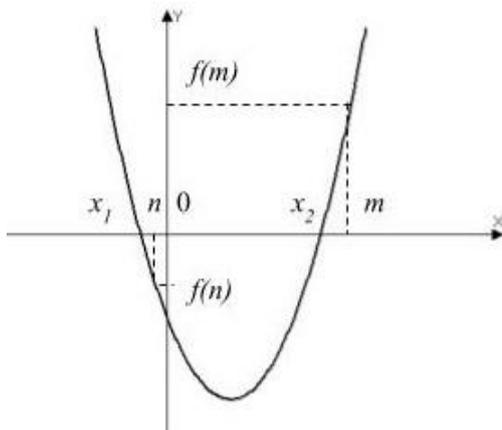


Рис. 9

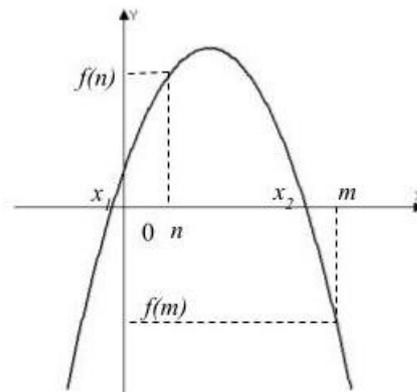


Рис. 10

Теорема 6 (оба корня лежат вне промежутка (n, m))

Чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x)$ лежали вне заданного промежутка $(n; m)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a \cdot f(n) < 0, \\ a \cdot f(m) < 0, \\ D > 0; \end{cases}$$

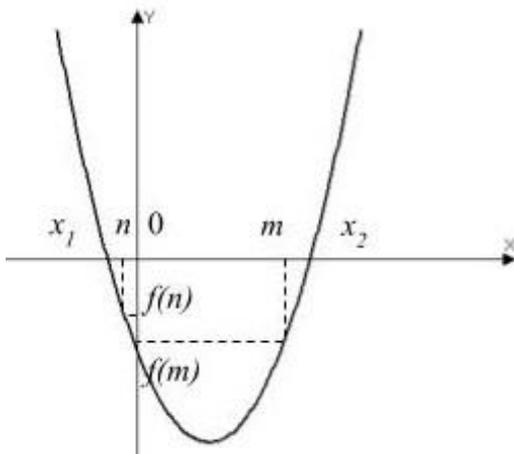


Рис. 11

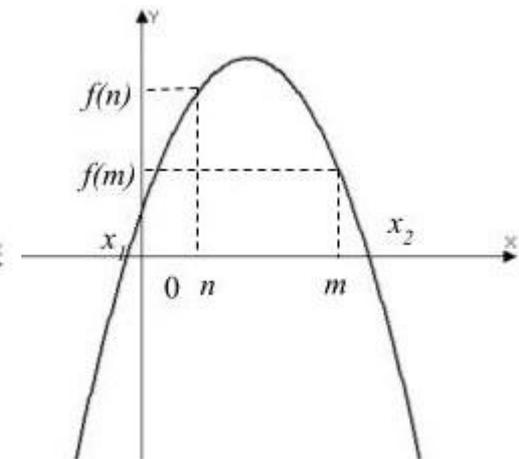


Рис. 12

Теорема 7 (точка расположена между корнями)

Чтобы один из корней квадратного трехчлена $f(x)$ был больше заданного числа n , а другой меньше, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} a \cdot f(n) < 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

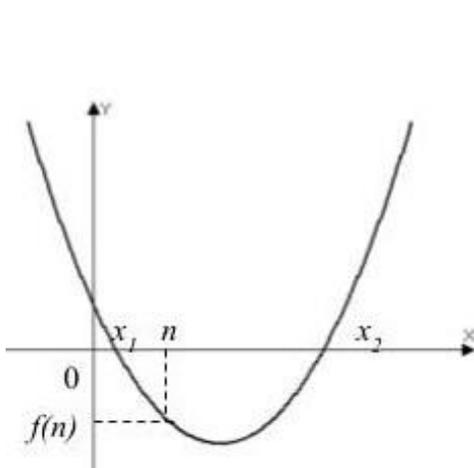


Рис. 13

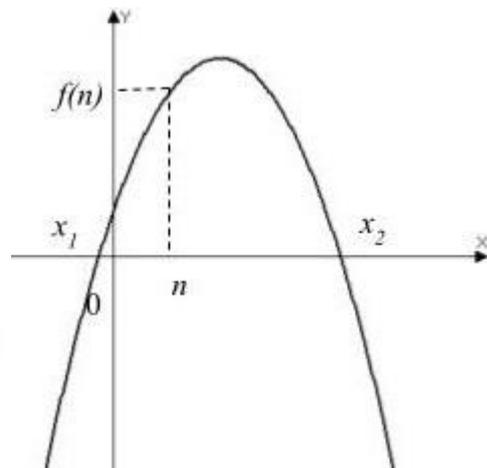


Рис. 14

1.2 Необходимые и достаточные условия расположения корней квадратного трехчлена

В результате работы с теорией было решено структурировать всю информацию в одну таблицу, представленную ниже:

Теорема о расположении корней квадратного трехчлена.	Утверждение о расположении корней x_1 и x_2 , ($x_1 < x_2$) квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ относительно заданных чисел n, m ($n < m$).	Необходимые и достаточные условия
1.	Оба корня больше n	$\begin{cases} a \cdot f(n) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_B > n; \end{cases}$
2.	Оба корня меньше m	$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ D \geq 0, \\ x_B < m; \end{cases}$
3.	Оба корня принадлежат промежутку (n, m)	$\begin{cases} a \cdot f(n) > 0, \\ a \cdot f(m) > 0, \\ D \geq 0, \\ n < x_B < m; \end{cases}$
4.	Меньший корень принадлежит промежутку (n, m)	$\begin{cases} a \cdot f(n) > 0 \\ a \cdot f(m) < 0 \\ D > 0 \end{cases}$
5.	Большой корень принадлежит промежутку (n, m)	$\begin{cases} a \cdot f(n) < 0, \\ a \cdot f(m) > 0, \\ D > 0, \end{cases}$
6.	Оба корня уравнения лежат вне промежутка (n, m)	$\begin{cases} a \cdot f(n) < 0, \\ a \cdot f(m) < 0, \\ D > 0; \end{cases}$
7.	Точка n расположена между корнями уравнения	$\begin{cases} a \cdot f(n) < 0, \\ D > 0. \end{cases}$

2. Практическая часть

Следующий этап – закрепление теории при решении задач.

Задача (к теореме 1)

При каких значениях параметра p оба корня уравнения

$$x^2 + 5x + 7 - 2p = 0 \text{ больше числа } -5?$$

$$\text{Решение: } \begin{cases} D > 0, \\ 1 \cdot f(-5) > 0, \\ x_B > -5. \end{cases}$$

$$1) D=25-4(7-2p)>0 \Rightarrow 25-28+8p>0 \Rightarrow p>\frac{3}{8}$$

$$2) f(-5)=25-25+7-2p>0 \Rightarrow p < 3,5$$

$$3) x_B = \frac{-5}{2}.$$

Следовательно, $p \in (\frac{3}{8}; 3,5)$.

Задача (к теореме 2)

Найдите все значения p , при которых уравнение

$x^2 + 2(p - 1)x + 4p - 7 = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

$$\text{Решение: } \begin{cases} D > 0, \\ 1 \cdot f(0) > 0 \\ x_B < 0 \end{cases}$$

$$1) D_1=(p-1)^2 - (4p-7) = p^2 - 2p + 1 - 4p + 7 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow p^2 - 6p + 8 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$$

$$2) f(0)=0+2(p-1) \cdot 0 + 4p - 7 > 0 \Rightarrow p > \frac{7}{4}$$

$$3) x_B = \frac{-2(p-1)}{2} < 0 \Rightarrow -p + 1 < 0 \Rightarrow p > 1$$

Следовательно, $p \in (\frac{7}{4}; 2) \cup (4; +\infty)$

Задача (к теореме 3)

Найдите все значения параметра a , при которых все корни уравнения $x^2 - 2(a - 3)x - a + 3 = 0$ лежат в интервале $(-3; 0)$.

$$\text{Решение: } \begin{cases} 1 \cdot f(0) > 0, \\ 1 \cdot f(-3) > 0, \\ -3 < x_B < 0, \\ D \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3) = 9 + 6(a - 3) - a + 3 > 0, \\ f(0) = -a + 3 > 0, \\ -3 < x_B < 0, \\ D = 4(a - 3)^2 + 4(a - 3) \geq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a - 6 > 0, \\ -a + 3 > 0, \\ -3 < x_B < 0, \\ 4(a - 3)(a - 2) \geq 0. \end{cases} \Rightarrow a \in (1, 2; 2]$$

Следовательно, $a \in (1, 2; 2]$

Задача (к теореме 4)

При каких значениях параметра a только меньший корень уравнения

$$x^2 - 2ax + a = 0 \text{ принадлежит интервалу } (0; 3)?$$

$$\text{Решение: } \begin{cases} 1 \cdot f(0) > 0 \\ 1 \cdot f(3) < 0 \Rightarrow a > 1,8. \\ D_1 > 0 \end{cases}$$

Следовательно, $a > 1,8$

Задача (к теореме 5)

При каких значениях параметра a только больший корень уравнения

$$x^2 + 4x - (a + 1)(a + 5) = 0 \text{ принадлежит промежутку } (-1; 0)?$$

$$\text{Решение: } \begin{cases} 1 \cdot f(-1) < 0 \\ 1 \cdot f(0) > 0 \\ D_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -4) \cup (-2; \infty) \\ a \in (-5; -1) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a \in (-5; -4) \cup (-2; -1)$ т.к.

$$f(-1) = 1 - 4 - (a+1)(a+5) < 0 \Rightarrow 1 - 4 - a^2 - 6a - 5 < 0 \Rightarrow a^2 + 6a + 8 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -4) \cup (-2; \infty),$$

$$f(0) = -(a+1)(a+5) < 0 \Rightarrow a \in (-5; -1).$$

Следовательно, $a \in (-5; -4) \cup (-2; -1)$.

Задача (к теореме 6)

При каких значениях параметра a один корень уравнения

$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ больше 3, а другой меньше 2?

$$\text{Решение: } \begin{cases} (a-2)f(2) < 0 \\ (a-2)f(3) < 0 \\ D_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-2)(4a-29) < 0 \\ (a-2)(7a-36) < 0 \\ a \in (-\frac{19}{30}; 5\frac{9}{30}) \end{cases} \Rightarrow a \in (2; 5)$$

$$f(2) = (a-2)4 - 2(a+3)2 + 4a = 4a - 20$$

$$f(3) = (a-2)9 - 18 - 6a - 18 + 4a = 7a - 36$$

$$D_1 = (a+3)^2 - (a-2)4a > 0 \Rightarrow a \in (-\frac{19}{30}; 5\frac{9}{30})$$

Следовательно, $a \in (2; 5)$.

Задача (к теореме 6) [3]

Найти все значения k , при которых один корень уравнения $(k+1)x^2 + 2(3k+5)x + 5(2k+5) = 0$ меньше -3, а другой - больше -1?

$$\text{Решение: } \begin{cases} (k+1) \cdot f(-3) < 0, \\ (k+1) \cdot f(-1) < 0, \\ D > 0; \end{cases}$$

$$1) (k+1)((k+1)(-3)^2 + 2(3k+5)(-3) + 5(2k+5)) < 0 \Rightarrow (k+1)(9k+9-18k-30+10k+25) < 0 \Rightarrow (k+1)(k+4) < 0 \Rightarrow k \in (-4; 1)$$

$$2) (k+1)((k+1)(-1)^2 + 2(3k+5)(-1) + 5(2k+5)) < 0 \Rightarrow (k+1)(k+1-6k-10+10k+25) < 0 \Rightarrow (k+1)(5k+16) < 0 \Rightarrow k \in (-\frac{16}{5}; -1).$$

$$3) (6k+10)^2 - 4(k+1)(5(2k+5)) > 0 \Rightarrow 36k^2 + 120k + 100 - 40k^2 - 140k - 100 > 0 \Rightarrow k(k+5) < 0 \Rightarrow k \in (-5; 0).$$

Следовательно $k \in (-\frac{16}{5}; -1)$.

Задача (к теореме 7)

При каких значениях a корни $x^2 - (2a + 1)x + 4 - a = 0$ лежат по разные стороны от числа 3?

$$\text{Решение: } \begin{cases} 1 \cdot f(3) < 0; \\ D > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - (2a + 1)3 + 4 - a < 0 \\ (2a + 1)^2 - 4(4 - a) > 0 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{10}{3}.$$

Следовательно, $a > \frac{10}{3}$.

Таким образом, теперь я знаю необходимые и достаточные условия для наиболее частых случаев расположения точек на плоскости относительно корней квадратного трехчлена.

Заключение

К основным результатам работы можно отнести следующее:

- 1) рассмотрены теоремы о расположении корней квадратного трехчлена;
- 2) обоснованы необходимые и достаточные условия расположения корней квадратного трехчлена;
- 3) приведены примеры задач по каждой теореме;
- 4) решения задач проанализированы.

Теперь я знаю необходимые и достаточные условия для наиболее частых случаев расположения точек на плоскости относительно корней квадратного трехчлена, будь то слева от корней, справа от них, между, либо относительно лишь одного корня, а результаты работы были переведены в удобный для восприятия формат таблицы.

Проблема работы решена: я смог разобрать тему, которая не рассматривается в школьной программе, но пригодится в будущем для сдачи ОГЭ и ЕГЭ по математике..

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С. Ю. Математика. Подготовка к ГИА. Задания с параметром. Изд-во Легион, учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА», 2014г. – 64 с.
2. Макарычев Ю.Н., Нешков К. И., Суворова С. Б. Алгебра. 9 класс. Учебник. ФГОС. Изд-во: Просвещение, 2021г. – 287 с.
3. Старков Ю. Н. 165 задач с параметрами – URL: <http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/starkov/165.pdf> (дата обращения: 20.10.2021).
4. Утверждения о расположении корней квадратного трехчлена URL: <http://mschool.kubsu.ru/cdo/shabitur/kniga/sprav/function/kvfunc/korni/korni.htm> (дата обращения 13.11.2021).
5. Яковлев И. В. Параметры и квадратный трехчлен – URL: <https://mathus.ru/math/parameter-quad2.pdf> (дата обращения: 21.10.2021).