Научно-исследовательская работа

Предмет: математика

«Геометрические методы в решении арифметических задач»

Выполнила:

Лось Мария Вячеславовна

учащаяся 10 класса

ГУО Гимназия г. Иваново», Беларусь, г. Иваново, Брестская область

Руководитель:

Лось Татьяна Николаевна

Учитель математики,

ГУО Гимназия г. Иваново», Беларусь, г. Иваново, Брестская область

Оглавление

Введение

Геометрия - уникальный школьный предмет, внутри которого заложены богатейшие возможности развития логического мышления и пространственного воображения. Почему же этот потенциал, как правило, не используется на уроках алгебры? Зачастую алгебру и геометрию вообще воспринимают как два различных предмета, забывая о том, что это составляющие одного целого.

Тем не менее, широко известны геометрические подходы в тригонометрии, текстовых задачах, при решении уравнений и систем уравнений.

Из-за сложности, нестандартности геометрический метод решения задач в школьном курсе математики не изучается. Тем важнее данное исследование.

Проблема: многие задачи алгебры очень сложно решить аналитическим путем.

Гипотеза: решение задач геометрическим методом позволяет представить условие задачи в виде рисунка или чертежа, что помогает глубже понять условие задачи, делает их более наглядными, очевидными, значительно упрощает решение, ведёт к более быстрому получению ответа.

Цель исследования: изучить геометрические идеи в решении алгебраических задач.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

– изучить литературу по теме исследования;

– применить геометрические методы решения в тригонометрических задачах;

– решить уравнения и системы уравнений с двумя и более переменными с помощью теоремы Пифагора;

– рассмотреть геометрическое решение текстовых задач;

– рассмотреть решение текстовых задач на смеси с помощью квадрата Пирсона.

Предмет исследования: геометрические методы решения алгебраических задач.

Объект исследования: алгебраические задачи.

Методы исследования: аналогия, обобщение, анализ научной литературы.

Новизна работы в том, что нами выявлены связи между, казалось бы, совершенно разнородными темами школьного курса математики, рассмотрены решения задач на основе интеграции алгебраического и геометрического методов.

Актуальность работы заключается в том, что нахождение нетрадиционных и наглядных приемов решения задач повышает математическую грамотность, позволяет быстро находить решения многих арифметических задач.

2.1. Теоретические основы геометрических идей решения алгебраических задач

Существуют способы решения алгебраических задач методами, основанными на наглядно-геометрических интерпретациях.

В классическую греческую эпоху геометрия занимала привилегированное положение. Она являлась именно той наукой, в которой проявлялся дедуктивный характер рассуждения, искусство доказательства. Например, алгебраические выводы у Евклида приводятся исключительно в геометрическом виде. Выражение вида $\sqrt{a}$ вводится как сторона квадрата с площадью а, произведение $a \cdot b$- это площадь прямоугольника со сторонами а и b.

Этот набор методов было принято называть геометрической алгеброй.

Геометрический метод состоит в том, что само доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением. (В старинных индийских сочинениях бывало так, что доказательство сводилось к чертежу, подписанному одним словом «Смотри!»).

На рубеже XVII в. на вооружение математиков пришли алгебраические методы, однако при этом нелишне вспомнить крылатую фразу замечательного французского математика Софии Жермен (1776-1831), которая сказала: «Алгебра – это не что иное, как записанная в символах геометрия, а геометрия – это просто алгебра, воплощенная в фигурах».

Геометрия – уникальный школьный предмет, внутри которого заложены богатейшие возможности развития логического мышления и пространственного воображения.

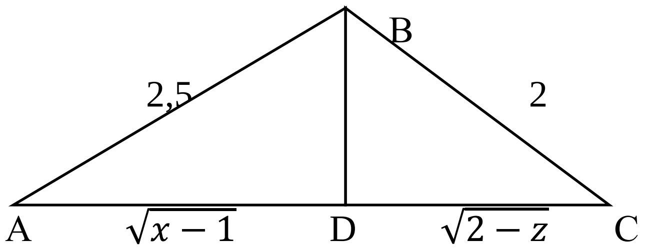
Теоретическую основу исследования составили работы следующих авторов: Мерзляк А. Г., Полонский В. В., Якир М. С. «Неожиданный шаг, или сто тридцать красивых задач», Гельфанд И. М., Шень А. Х. «Алгебра», Березин В. Н., Березина Л. Ю., Никольская И. Л. «Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике», Генкин Г. З. «Геометрическое решение негеометрических задач», Литвинова С.А., Куликова Л.В., Шиловская С.В., Тараева Г.Ю. «За страницами учебника математики».

2.2 Решение систем уравнений и уравнений с помощью треугольников

1. Вычислить значение выражения y ($\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z}$), y>0, $x+y^2 = 7{,}25$, $y^2 - z = 2$, $y^2 = \sqrt{x-1} * \sqrt{2-z}$

Решение:

Во-первых, $x \neq 1$ и $z \neq 2$. Действительно, если x=1 и z=2, то y=0. Однако пара чисел 1 и 0 не удовлетворяет условию $x+y^2 = 7{,}25$. Аналогично, пара чисел 0 и 2 не удовлетворяет условию $y^2 - z = 2$. Во-вторых, для x>1, z<2 условия $x+y^2 = 7{,}25$, $y^2 - z = 2$ можно трансформировать соответственно в уравнения $(\sqrt{x-1})^2 + y^2 = 6{,}25$ и $y^2 + (\sqrt{2-z})^2 = 4$. Рассуждая как в первой задаче, получаем:



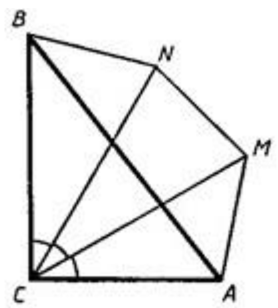
y ($\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z}$)= $2S_{ABC} = 2{,}5 * 2 = 5$.

Ответ: 5.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{9+x^2-3x\sqrt{3}} + \sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}} + \sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}} = 5.$$

Решение:



Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами *AC* = 3 и *BC* = 4. Разделим прямой угол на три равные части и отложим на полученных лучах отрезки *CM* = *x*, *CN* = *y* (если *x* и *y* отрицательные, то они откладываются в противоположную сторону)

Согласно с теоремой косинусов, слагаемые в левой части соответственно равны *AM*, *MN*, *NB*:

$\sqrt{3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$ = *AM*, $\sqrt{x^2+y^2-2\cdot x\cdot y\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$ = *MN*,

$\sqrt{4^2+y^2-2\cdot 4\cdot y\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$ =*NB*.

Поскольку *AM* + *MN* + *NB* = *AB*, то звенья ломаной *AMNB* расположены на одной прямой. Это означает, что точки M и N расположены на гипотенузе *AB*, причем *x* = *CM* – биссектриса в треугольнике *ACN*, а *y* = *CN* – биссектриса в треугольнике *BCM*.

Получаем, что: $\begin{cases} x=\dfrac{3\sqrt{3}y}{3+y} \\ y=\dfrac{4\sqrt{3}x}{4+x} \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x=\dfrac{24}{3+4\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{24}{4+3\sqrt{3}} \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x=\dfrac{24}{3+4\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{24}{4+3\sqrt{3}} \end{cases}$

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+4y=26 \\ \sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=10 \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим слагаемые левой части второго уравнения:

$\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$.

$\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}$.

Пусть это расстояния между точками M(x;y) и A(2;-1); M(x;y) и B(10;5) соответственно.

Найдём расстояние между точками A(2;1) и B(10;5):

AB = $\sqrt{(10-2)^2+(5+1)^2}$ = 10.

Итак, геометрическая интерпретация второго уравнения системы такова: AM + +BM =AB, поэтому можно утверждать, что точка М принадлежит отрезку АВ, то есть $2\leq x\leq 10$ и $-1\leq y\leq 5$.

Составим уравнение прямой АВ, проходящей через точки А(2;-1) и В(10;5):

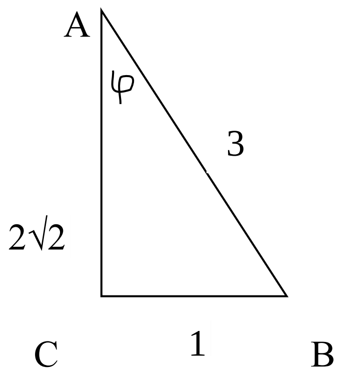
$-1 = k\cdot 2 + b$ и $5 = k\cdot 10 + b$, откуда $k = \frac{3}{4}$; $b = -\frac{5}{2}$, то есть $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$ или $3x - 4y = 10$.

Запишем новую систему: $\begin{cases}3x+4y=26\\3x-4y=10\end{cases}$. Значит, x = 6; y = 2.

Ответ: (6;2)

2. 3 Геометрические методы в тригонометрии

1. Решить уравнение $\sin 3x + 2\sqrt{2}\cos 3x = 2$



Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами

BC = 1 и AC = $2\sqrt{2}$. Тогда AB = $\sqrt{1+8} = 3$.

Пусть<A= φ,

где φ – острый угол.

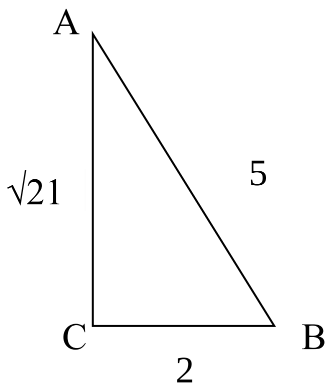
Тогда $\cos\varphi = 2\sqrt{2}/3$ и $\sin\varphi = 1/3$.

Имеем $\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos 3x = \frac{2}{3}$, $\cos 3x\cos\varphi + \sin 3x\sin\varphi = \frac{2}{3}$

$\cos(3x-\varphi) = \frac{2}{3}$. Решая уравнение получим: x=1/3arcsin1/3±1/3arccos2/3+2πn/3, nєZ

Ответ: x=1/3arcsin1/3±1/3arccos2/3+2πn/3, nєZ

2. Найдите значение выражения $\sqrt{21}\,\mathrm{tg}(\arcsin\frac{2}{5})$.



Решение:

По определению арксинуса имеем: $-\frac{\pi}{2}\leq \arcsin x\leq \frac{\pi}{2}$,

причём если $x\geq 0$, то $0\leq \arcsin x\leq \frac{\pi}{2}$.

Построим прямоугольный треугольник АВС

с углом А, который равен $\arcsin\frac{2}{5}$. При этом, по теореме

Пифагора, прилежащий катет будет равен $\sqrt{21}$.

Поэтому tg(arcsin$\frac{2}{5}$) = $\frac{CB}{AC}$ = $\frac{2}{\sqrt{21}}$ и $\sqrt{21}$tg(arcsin$\frac{2}{5}$) = $\sqrt{21}$*$\frac{2}{\sqrt{21}}$ = 2.

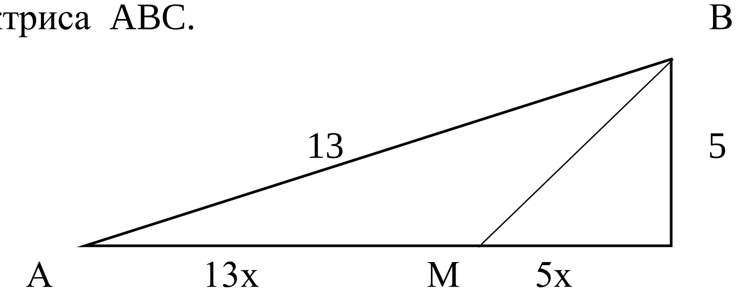
Ответ: 2.

3. Вычислите ctg ($\frac{1}{2}$ arccos $\frac{5}{13}$)

Решение:

Если использовать понятия косинуса и котангенса острого угла прямоугольника треугольника, теорему Пифагора и свойство биссектрисы угла треугольника, то задача решается мгновенно.

Пусть дан треугольник ABC, в котором ACB=90˚, BC=5, AB=13 и BM – биссектриса ABC.



Тогда MC=5x, AM=13x и AC=12, т.е. x=$\frac{2}{3}$.

ctg ($\frac{1}{2}$ arccos $\frac{5}{13}$)=$\frac{BC}{MC}$=$\frac{5}{5x}$=$\frac{1}{x}$=$\frac{3}{2}$.

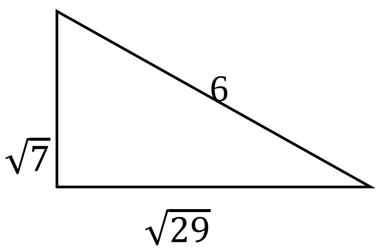
Ответ: 1,5.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$\sqrt{29}$ sin 2x - $\sqrt{7}$ cos 2x – 3

Решение:

Пусть $\sqrt{29}$ и $\sqrt{7}$ катеты прямоугольного треугольника с углом β



Тогда $\sqrt{29}$ sin 2x - $\sqrt{7}$ cos 2x – 3 = 6 sin (2x- β) - 3

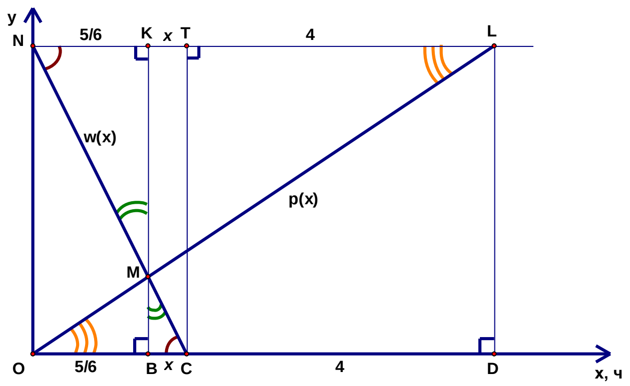
-1≤ sin (2x- β)≤ 1   -6≤ 6sin (2x - β)≤ 6   -9≤ 6sin (2x - β) – 3 ≤ 3

Ответ: Наибольшее значение выражения 3, наименьшее значение - 9.

2.4 Текстовые задачи и подобие треугольников

Очень многие текстовые задачи на составление уравнений (или систем уравнений) можно решать графически. К ним относятся задачи на движение и на совместную работу. Решение задачи основывается на точных геометрических соотношениях. Преимущество геометрического решения в его наглядности, так как чертёж помогает глубже понять условия задачи. Данные навыки могут пригодиться на уроках физики, где часто практикуются графические подходы к решению задач на движение.

1. Из пункта O в пункт N вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта N в пункт O выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 минут после своего выезда из N. Сколько времени понадобится пешеходу для того, чтобы пройти весь путь, если известно, что велосипедист проделал бы весть путь на 4 часа быстрее пешехода.



Решение:

Построим график зависимости пройденного пешеходом и велосипедистом пути от времени. Пусть p(x) – зависимость пройденного пешеходом пути от времени x, w(x) - зависимость пройденного велосипедистом пути от времени x. Обозначим BC через *x*. Тогда NK=OB=5/6 ч, CD=4 ч, KT=*x*, KL=*x*+4.

1) $\triangle MBC \sim \triangle MKN$ – по двум углам: $\angle MBC=\angle MKN=90^{\circ}$, $\angle KMN=\angle BMC$ – как вертикальные. Из подобия следует: $\frac{NK}{BC}=\frac{KM}{BM}$ (1)

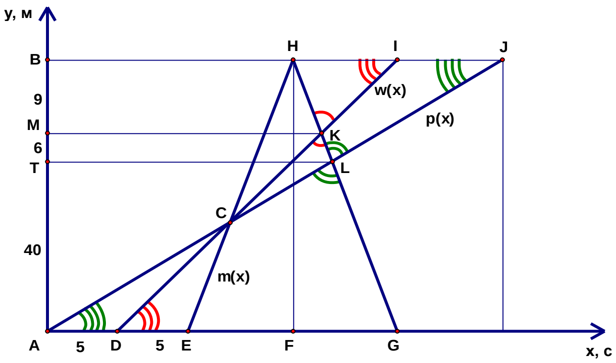
2) $\triangle MLK \sim \triangle MBO$ – по двум углам: $\angle KLM=\angle MOB$ – как накрест лежащие углы при параллельных прямых, $\angle MBO=\angle MKL=90^{\circ}$. Из подобия следует: $\frac{KL}{OB}=\frac{KM}{BM}$ (2)

3) Из равенств (1) и (2) получаем: $\frac{NK}{BC}=\frac{KL}{OB}$ 4) Подставим значения: $\frac{5/6}{x}=\frac{x+4}{5/6}\Rightarrow x=\frac{1}{6}$ 5) Так как OD=(x+5/6+4) – время прохождения пути пешеходом, то он проделал его за 5 часов.

Ответ: 5 часов.

2. Три пловца должны проплыть из пункта A в пункт B и обратно. Сначала стартует первый, через 5 секунд – второй, еще через 5 секунд – третий. На пути из A до B прошли некоторую точку C одновременно. Третий пловец, доплыв до B и сразу повернув назад, встречает второго в 9 метрах от B, а первого – в 15 метрах от B. Найдите скорость третьего пловца, если расстояние между A и B равно 55 метров.

Решение:



Построим график зависимости пройденного пешеходами и лыжником пути от времени. Пусть p(x) – зависимость пути, который проплыл первый пловец, от времени x, w(x) – зависимость пути, который проплыл второй пловец, от времени x, m(x) – зависимость пути, который проплыл третий пловец, от времени x. AD=DE=5 с, AB=55 м, BT=15 м, BM=9 м.

1) △DKG~△IKH – по двум углам: ∠DKG=∠IKH – как вертикальные углы, ∠KDG=∠KIH – как накрест лежащие при параллельных прямых. Пусть h_1, h_2 – высоты этих треугольников соответственно. Из подобия следует:

$$\frac{DG}{HI}=\frac{h_1}{h_2}\Leftrightarrow\frac{DE+EF+FG}{HI}=\frac{46}{9}\Leftrightarrow\frac{5+2EF}{HI}=\frac{46}{9}\quad(1)$$

2) △ALG~△JLH – по двум углам: ∠ALG=∠JLH – как вертикальные углы, ∠LAG=∠LJH – как накрест лежащие при параллельных прямых. Пусть h_3, h_4 – высоты этих треугольников соответственно.

Из подобия следует:

$$\frac{AG}{HJ}=\frac{h_3}{h_4}\Leftrightarrow\frac{AD+DE+EF+FG}{HI+IJ}=\frac{40}{15}\Leftrightarrow\frac{5+EF}{HI}=\frac{8}{3}\ (2)$$

3) Из равенств (1),(2) следует: $\frac{5+2EF}{5+EF}=\frac{46}{9}/\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{5+2EF}{5+EF}=\frac{23}{12}$

$60+24EF=115+23EF \qquad EF=55$

Следовательно скорость первого пловца: $\frac{55\,\text{м}}{55\,\text{с}}=1\,\text{м/с}$

Ответ: 1 м/с

2.5 Решение задач на сплавы и смеси с помощью «квадрата Пирсона»

Построим квадрат и начертим обе его диагонали. Слева от квадрата рядом с его вершинами запишем одну над другой процентное содержание растворенного вещества в исходных растворах, а в его центре – процентное содержание вещества в смеси, которую нужно приготовить, и общую массу вещества. Внутри квадрата у соответствующих вершин запишем массы взятых растворов.

Теперь выполним следующие действия:

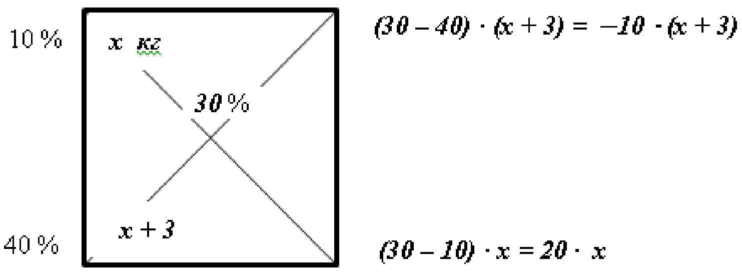
1) Умножим выражения, стоящие внутри и снаружи квадрата, рядом с верхней, а затем и нижней вершинами. Их сумма равна произведению чисел, стоящих в центре квадрата.
2) Вычтем вдоль каждой диагонали квадрата процентные содержания веществ и запишем у свободного конца диагонали, умножив их на соответствующие массы исходных растворов.

Получим выражения: $(k-x_1)\cdot m_2$ и $(k-x_2)\cdot m_2$. Сумма этих выражений равна 0.

Таким образом, мы получили механический способ решения таких задач с помощью квадрата Пирсона.

1. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Решение.



Построим квадрат Пирсона и сложим два выражения, записанные справа от квадрата. Получаем уравнение:

20 x – 10 (x + 3) = 0, откуда x = 3 (кг) – масса первого сплава, тогда x + 3 = 3 + 3 = 6 (кг) – масса второго сплава. Масса третьего сплава равна: 3 + 6 = 9 (кг).

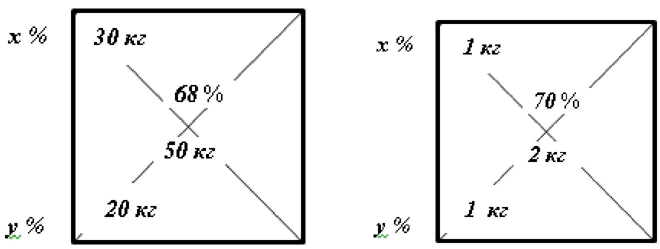
Ответ: 9 кг.

2. Имеется два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение.

Пусть процентное содержание вещества в первом растворе равно x %, а во втором – y%.

При заполнении первого квадрата масса смеси равна 30 + 20 = 50 (кг), а во втором – примем массы растворов равными 1 кг, тогда общая масса смеси равна 1 + 1 = 2 (кг).



Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 30x + 20y = 3400, \\ x + y = 140, \end{cases} \qquad \text{откуда } x = 60\ (\%).$$

Масса кислоты, содержащейся в первом сосуде, равна

60 % (от 30 кг) = 0,6 · 30 = 18 (кг).

Ответ: 18 кг.

Заключение

«Выявленная и доказанная психологами и физиологами функциональная ассиметрия головного мозга заставляет нас также несколько иначе взглянуть на значение геометрии в развитии человека. Оказывается, левое полушарие нашего мозга ведает логическим, алгоритмическим мышлением… Правое полушарие «отвечает» за чувственную, образную сферу нашего сознания… Некоторые из известных методик обучения математике чрезмерно перегружают левое полушарие мозга.». Таким образом, внедрение геометрических интерпретаций и доказательств в алгебре и арифметике способствует гармонизации работы полушарий мозга. В любом случае, решения типа «смотри» развивают не меньше, чем преобразования многочленов.

В ходе проведенного исследования наша гипотеза нашла подтверждение - алгебраические задачи могут быть решены с помощью геометрии.

Геометрический метод характеризуют как метод, идущий от наглядных представлений. Существенными признаками этого понятия являются геометрические (наглядные) представления и законы геометрии, в которых отражены свойства геометрических фигур.

Я показала, что практически в каждом разделе алгебры существуют задания, геометрическое решение которых намного рациональнее, чем традиционное. Мне удалось достичь цели моего исследования: я овладела способами решения алгебраических задач геометрическими методами и теперь смогу применять полученные знания на экзаменах и олимпиадах. Я рассмотрела много алгебраических заданий, решаемых с помощью геометрии, классифицировала их.

В результате проделанной работы я пришла к следующим выводам:

- При решении некоторых задач геометрическими методами наблюдается явно выраженная экономия сил, энергии, а главное времени;
- Чертеж помогает расширить задачу – поставить и решить общие вопросы, глубже проникнуть в существо задачи, оценить реальность результата и промежуточных действий;

- Чтобы решить алгебраическую задачу геометрическим методом необходимо иметь навык и «видение» геометрической интерпретации задачи, что, на мой взгляд, и является самым сложным в данном методе;
- Во многих разделах алгебры существуют классы задач, решаемых геометрическими методами.

Работая с различными сборниками задач и статьями в математических журналах, считаю нужным отметить отрывочность рассмотрения этой темы. Негеометрические задачи, решаемые геометрическими методами, встречаются в них или в разделе нестандартных методов решения задач, где приводится решение одного - двух примеров или вообще не выделяются в отдельный класс. Именно этим объясняется достаточно большой список информационных источников.

Список литературы

1. Азия, А.П. Вольпер, И.М. Квадрат Пирсона / А. П. Азия А., И. М. Вольпер// Квант. – 1973. - № 3. – С. 61. http://kvant.mccme.ru/1973/03/kvadrat_pirsona.htm
2. Генкин Г. З. «Геометрическое решение негеометрических задач»
3. Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы/ [Н.Х. Агаханов, И.И.Богданов, П.А.Кожевников и др.] – М.: Просвещение, 2010 – 239с.: ил. – (Пять колец).
4. Пирютко О.Н.. – Графический метод решения текстовых задач. Минск: Новое знание, 2010.
5. Шарыгин И.Ф. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. М.,1999.
6. Шахно К.У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Изд. 5-е, стереотипное. Минск, «Вышейш. школа», 1969.