

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение  
Ненецкого автономного округа  
«Ненецкая средняя школа им. А.П. Пырерки»

Исследовательская работа на тему  
**«Софизмы и парадоксы  
в математике»**

**Выполнил:**  
Коротаева Екатерина,  
обучающаяся 5 - А класса  
ГБОУ НАО «НСШ им. А.П.Пырерки»

**Руководитель:**  
Данилова Т.В.,  
учитель математики  
ГБОУ НАО «НСШ им. А.П.Пырерки»

Нарьян-Мар

2021 г.

## Содержание

1. Введение.....	3-4
2. Понятие софизма.....	4
3. История возникновения софизмов.....	4-5
4. Алгебраические и арифметические софизмы.....	5-6
5. Геометрические софизмы.....	6
6. Логические софизмы.....	6-7
7. Понятие парадокса.....	7
8. Многообразие парадоксов.....	7
8.1 Геометрические парадоксы.....	7-9
8.2 Логические парадоксы.....	9
9. Практическая значимость.....	9-10
10. Список литературы.....	10
11. Приложение.....	11- 13

## Введение

"Предмет математики настолько серьезен,  
что полезно не упускать случая  
сделать его немного занимательным"

Б. Паскаль

**Проблема:** Мой любимый предмет – математика. Однажды на уроке математики нам учитель предложила рассмотреть решение одной задачи, и мы пришли к некоторому так называемому софизму, меня заинтересовали математические неожиданности, которые возникают при решении некоторых задач. Как найти ошибки в доказательствах, рассуждениях в процессе решения нестандартных задач такого вида?

**Цель:** рассмотреть основные виды математических софизмов и парадоксов, причины их возникновения и восприятие учениками.

### Задачи:

1. Познакомиться с софизмами и парадоксами
2. Изучить историю возникновения и их виды
3. Научиться распознавать ошибки в них
4. Провести исследование, в ходе которого можно будет определить процент объективности восприятия софизмов и парадоксов учащимися ГБОУ НАО «НСШ им. А.П.Пырерки»
5. Сделать вывод по результатам проведенной работы.

**Гипотеза исследования:** математика без софизмов и парадоксов существовать не может.

**Предмет исследования:** Математические софизмы и парадоксы

**Новизна:** знакомство с новыми для нас понятиями

**Методы, используемые при проведении работы:** изучение источников: литературы, энциклопедий, сайтов в Интернете, синтез полученной информации и ее анализ, анкетирование.

**Актуальность темы** заключается в том, что разбор софизмов и парадоксов прививает навыки правильного мышления. Обнаружить ошибку в софизме – это значит осознать ее, а осознание ошибки предупреждает от повторения ее в других математических рассуждениях.

Эта тема для меня очень интересная, развивающая познавательный интерес, любознательность к урокам математики. В школьном курсе математики не используются софизмы и парадоксы. Данный материал можно использовать на уроках математики, что

расширит кругозор учащихся и покажет значение парадоксов и софизмов в области математики.

Для написания проекта я использовала различные пособия, энциклопедии по математике, а также использовались и Интернет-ресурсы. В ходе работы приходилось брать много информации из Интернета, справочной литературы.

## **2. Понятие софизма**

Софизм - формально кажущееся правильным, но по существу ложное умозаключение, основанное на преднамеренно неправильном подборе исходных положений. Софизм - (от греческого *sophisma* – уловка, ухищрение, выдумка, головоломка), умозаключение или рассуждение, обосновывающее какую-нибудь заведомую нелепость, абсурд или парадоксальное утверждение, противоречащее общепринятым представлениям.

Софизмы связаны чаще всего как с недостаточной самокритичностью ума и неспособностью его сделать надлежащие выводы, так и с его стремлением охватить то, что пока ему неподвластно. Нередко софизм представляет собой просто защитную реакцию незнания или даже невежества, нежелающего признать своё бессилие и уступить знанию.

## **3. История возникновения софизмов**

Софизмы появились ещё в Древней Греции. Они тесно связаны с философской деятельностью софистов – платных учителей мудрости, учивших всех желающих философии, логике и особенно риторике (науке и искусству красноречия). Одна из основных задач софистов заключалась в том, чтобы научить человека доказывать (подтверждать или опровергать) всё, что угодно, выходящий победителем из любого интеллектуального состязания. Для этого они разрабатывали разнообразные логические, риторические и психологические приёмы.

Софизмы существовали задолго до философов-софистов, а наиболее известные и интересные были сформулированы позднее в сложившихся под влиянием Сократа философских школах. Термин "софизм" впервые ввел Аристотель, охарактеризовавший софистику как мнимую, а не действительную мудрость.

Характерно, что для широкой публики софистами были также Сократ, Платон и сам Аристотель. Не случайно Аристофан в комедии "Облака" представил Сократа типичным софистом. В ряде диалогов Платона человеком, старающимся запутать своего противника тонкими вопросами, выглядит иногда в большей мере Сократ, чем Протагор.

Широкую распространенность софизмов в Древней Греции можно понять, только предположив, что они как-то выражали дух своего времени и являлись одной из особенностей античного стиля мышления.

Дискуссия между софистами и Сократом о существовании объективной истины зародилась приблизительно в V в. до н.э. С тех пор она продолжается до настоящего времени. Среди наших современников можно встретить немало людей, которые поддерживают софистов. "Сколько людей, столько и мнений", – говорят они. Однако и в нынешнюю эпоху есть те, которые вслед за Сократом считают, что, хотя мир и человек сложны и многогранны, тем не менее, нечто объективное и общезначимое существует, точно так же, как существует солнце в небе – одно для всех.

В наше время ученые продолжают обращаться к софизмам совсем не для того, чтобы удивить кого-то. Человеку свойственно ошибаться, поэтому очень важно, чтобы он умел выявлять свои и чужие ошибки, учился избегать их. Действительно, чем хитрее софизм, чем искуснее замаскирована ошибка, тем больше удовлетворения приносит он тому, кто разгадал его, так как это – маленькое открытие и прекрасная школа культуры математических вычислений.

#### 4. Алгебраические и арифметические софизмы

Арифметика - наука о числах, в первую очередь о натуральных (целых положительных) числах и (рациональных) дробях, и действиях над ними. Так что же такое арифметические софизмы? Арифметические софизмы – это числовые выражения, имеющие неточность или ошибку, не заметную с первого взгляда.

Алгебраические софизмы - намеренно скрытые ошибки в уравнениях и числовых выражениях.

##### 1. Докажем, что число 0 (нуль) больше любого числа $a$ .

- Если число  $a$  отрицательное, то утверждение очевидно.
- Пусть  $a$  — сколь угодно большое положительное число. Ясно, что  $a - 1 < a$ .

Умножим обе части этого неравенства почленно на  $-a$ , получим:  $-a^2 + a < -a^2$ .

Прибавив к обеим частям полученного неравенства по  $a^2$ , получим:  $-a^2 + a + a^2 < -a^2 + a^2$ ,  
то есть  $a < 0$ .

Следовательно, любое, даже сколь угодно большое положительное число  $a$  меньше 0.

Ошибка: Умножая на отрицательное число, знак неравенства меняем на противоположный.

##### 2. Докажем, что «Дважды два – пять».

Доказательство: Пусть исходное соотношение - очевидное равенство:  $4:4 = 5:5$  (\*) .

Вынесем за скобки общий множитель каждой части (\*) равенства, и мы получим:  $4 \cdot (1:1) = 5 \cdot (1:1)$  (\*\*)

Тогда разложим число 4 на произведение  $2 \cdot 2$ . Получаем  $(2 \cdot 2) \cdot (1:1) = 5 \cdot (1:1)$  (\*\*\*)

Наконец, зная, что  $1:1=1$ , мы из соотношения (\*\*\*) устанавливаем:  $2 \cdot 2=5$ .

Ошибка: ошибка заключается в том, что нельзя было выносить множитель за скобки в уравнение (\*\*\*)

3. Докажем, что  $5 = 6$ .

Легко проверить справедливость равенства:  $35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$ .

Вынеся общий множитель за скобки, его можно записать так:

$$5 \cdot (7 + 2 - 9) = 6 \cdot (7 + 2 - 9).$$

Разделим левую и правую части равенства на  $(7 + 2 - 9)$ , получим, что  $5=6$ .

Ошибка: ошибка в этих рассуждениях состоит в том, что мы разделили левую и правую части на 0 (нуль), что нельзя делать.

### 5. Геометрические софизмы

Геометрические софизмы основаны на ошибках связанных с геометрическими фигурами и действиями над ними.

1. Докажем, что Спичка вдвое длиннее телеграфного столба.

*Доказательство:*

Пусть  $a$  - длина спички и  $b$  - длина столба. Разность между  $b$  и  $a$  обозначим через  $c$ .

Имеем  $b - a = c$ ,  $b = a + c$ . Перемножаем два эти равенства по частям, находим:

$$b^2 - ab = ca + c^2. \text{ Вычтем из обеих частей } bc.$$

$$\text{Получим: } b^2 - ab - bc = ca + c^2 - bc, \text{ или } b(b - a - c) = -c(b - a - c),$$

откуда  $b = -c$ , но  $c = b - a$ , поэтому  $b = a - b$ , или  $a = 2b$ .

*Ошибка:* Ошибка заключается в том, что в выражении  $b(b-a-c) = -c(b-a-c)$  производится деление на 0

### 6. Логические софизмы

Логические софизмы - софизмы, ошибки которых заключаются в неправильных рассуждениях. Они выглядят как лишенная смысла и цели игра с языком; игра, опирающаяся на многозначность языковых выражений, их неполноту, недосказанность, зависимость их значений от контекста и т.д. Эти софизмы кажутся особенно наивными и несерьезными.

Приведем некоторые примеры:

#### 1. Полупустое и полуполное

*Доказательство:*

Полупустое есть то же, что и полуполное. Если равны половины, значит, равны и целые.

Следовательно, пустое есть то же, что и полное

*Ошибка:*

Полупустое не является половиной чего либо пустого, а является чем либо наполовину наполненным.

## 2. "Софизм учёбы"

*(песенка, сочиненная английскими студентами)*

Чем больше учишься, тем больше знаешь. Чем больше знаешь, тем больше забываешь.

Чем больше забываешь, тем меньше знаешь. Чем меньше знаешь, тем меньше забываешь.

Но чем меньше забываешь, тем больше знаешь. Так для чего учиться?

## 7. Понятие парадокса

Парадокс в широком смысле - это утверждение, резко расходящееся с общепринятыми, устоявшимися мнениями, отрицание того, что представляется "безусловно правильным". Само греческое слово, от которого произведено слово "парадокс", буквально означало "необычное, странное, невероятное, замечательное". Парадокс в более узком и более современном значении - это два противоположных утверждения, для каждого из которых имеются представляющиеся убедительными аргументы.

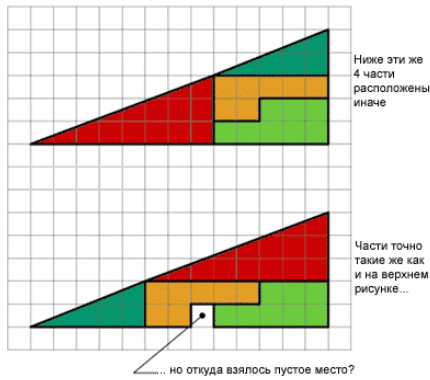
Особое место занимают парадоксы в математике и логике, так как "чистая математика" - абстрактная наука, построенная на теориях, которые не кажутся очевидными с первого взгляда. Здесь их статус глубоких и кардинальных проблем не подвергается сомнению. Тем более, что в математике, как ни в одной другой науке, особое внимание обращается на строгость и логическую последовательность доказательств. При этом часто возникают ситуации, в которых рассуждения, применяющиеся совсем недавно и считающиеся строгими, будут требовать дополнительного обоснования. Тогда математик просто излагает свои идеи в том виде, как они у него возникают.

## 8. Многообразие парадоксов

Изучая и анализируя информацию по теме парадоксов, я пришла к выводу, что в настоящий момент существует немало их классификаций и ни одну из них нельзя назвать совершенной. Попытаться классифицировать, упорядочить парадоксы – это как попытаться объять необъятное. Они существуют повсюду и являются неотъемлемой частью любой науки. Я решила рассмотреть более понравившиеся мне парадоксы.

### 8.1 Геометрические парадоксы

- Задача про треугольник



Дан прямоугольный треугольник, составленный из 4 частей. После перестановки частей при визуальном сохранении изначальных пропорций появляется дополнительная, не занятая ни одной частью, клетка. Для начала убедимся, что все фигуры совпадают. Они специально для этого раскрашены в разные цвета. Чем же различаются картинки? Зеленая фигурка осталась на месте, значит, ее выкинем из рассмотрения. Желтая сдвинулась, но не понятно, что это изменило, поэтому идем дальше. Треугольники поменялись местами. Что же не так? Не все так гладко. Вот оно! Углы у треугольников разные. У одного тангенс равен  $2/5$ , а у второго тангенс соответствующего угла равен  $3/8$  (я рассматривала наиболее острые углы). Раз эти углы не равны, значит «гипотенуза» треугольников не является прямой. Проведем настоящую гипотенузу в обоих треугольниках - что мы видим? — что верхний треугольник — это на самом деле вогнутый четырехугольник, а нижний — выгнутый четырехугольник.

- «Невозможный треугольник»

Первую невозможную фигуру (рис. 1) в 1934 году изобразил шведский художник Оскар Реутерсвард. Это «Невозможный треугольник», на самом деле такую фигуру невозможно составить из кубиков, но художник смог это сделать?

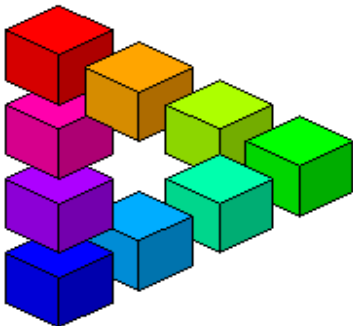


Рис.1



Рис. 2

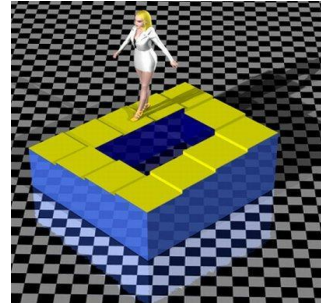
Три картины художника шведское правительство решило увековечить на почтовых марках (рис. 2), одной из них стал и "невозможный треугольник".

- «Бесконечная лестница»



Эту фигуру называют еще "Лестницей Пенроуза" (по имени ее создателя), а также "Вечной лестницей" или "Непрерывно восходящей и нисходящей тропой".

Перед нами предстает лестница, ведущая, казалось бы, вверх или вниз, но при этом человек, шагающий по ней, не поднимается и не опускается. Завершив свой визуальный маршрут, он окажется в начале пути.



## 8.2 Логические парадоксы

- *Парадокс парикмахера*

В одной деревне жил единственный парикмахер-мужчина. Здесь был издан указ: "Парикмахер имеет право брить тех и только тех жителей деревни, которые не бреются сами". Спрашивается, может ли парикмахер брить сам себя? Кажется, что не может, так как это запрещено указом. Но наряду с этим, если он не бреет себя, то попадает в число тех жителей, которые не бреются сами, а таких людей парикмахер имеет право брить.

- *Парадокс Лжеца*

Этот древнегреческий парадокс имеет множество вариаций. Приведём одну из них.

Человек произносит: « Я лгу». Он обманывает или говорит правду? С одной стороны, он говорит неправду, т.к. это утверждает. Но это означает, что он утверждает правду, а, следовательно, лжет.

## 9. Практическая значимость

В рамках данного исследования ученикам 5 «А» и 7 классов (33) были заданы следующие вопросы:

1. Знакомо ли Вам понятие «софизм»? (Да/Нет)
2. Знакомо ли Вам понятие «парадокс»? (Да/Нет)
3. Возьмём числовое равенство:  $35+10-45=42+12-54$ . Вынесем общие множители левой и правой частей за скобки. Получим:  $5(7+2-9)=6(7+2-9)$ . Разделим обе части этого равенства на общий множитель (заключенный в скобки). Получаем  $5=6$ . Как Вы это объясните?  
(Ошибки нет/ Допущена ошибка в условии/ Допущена ошибка в решении (указать ошибку))
4. Дано уравнение  $x-a=0$ . Разделив обе части этого уравнения на  $x-a$ , получим, что  $1=0$ . Поскольку это равенство неверное, то это означает, что исходное уравнение не имеет корней. Допущена ли здесь ошибка, и если да, то какая?  
(Ошибки нет/ Допущена ошибка в условии/ Допущена ошибка в решении (указать ошибку))

5. Одному деревенскому брадобрею приказали «брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется». Как он должен поступить с самим собой? (Брить/ Не брить/ Решить невозможно)

6. Человек произносит: «Я лгу». Он обманывает или говорит правду?

Анализ учебников показал, что задания подобного типа встречаются редко. (Приложение 1)

После изучения материала, я выяснила, что парадоксы похожи на софизмы, поскольку тоже приводят рассуждения к противоречиям. Главное же различие между ними, как остроумно заметил писатель Даниил Гранин, заключается в том, что софизм – это ложь, обряженная в одежды истины, а парадокс – истина в одеянии лжи. Проследивая историю математики, можно сказать, что во все времена математику спасала какая-нибудь новая идея. Она придавала математике строгость, восстанавливая ее авторитет. Поэтому не стоит бояться парадоксов, ибо они являются двигателями науки.

О математических софизмах и парадоксах можно говорить бесконечно много. Я выяснила, что понять софизм как таковой получается не сразу. Требуются определенный навык и смекалка. Развитая логика мышления поможет не только в решении каких-нибудь математических задач, но еще может пригодиться в жизни. Исследовать софизмы и парадоксы действительно очень интересно и необычно.

Благодаря этой теме можно научиться искать ошибки в рассуждениях других, научиться грамотно строить свои суждения и логические объяснения.

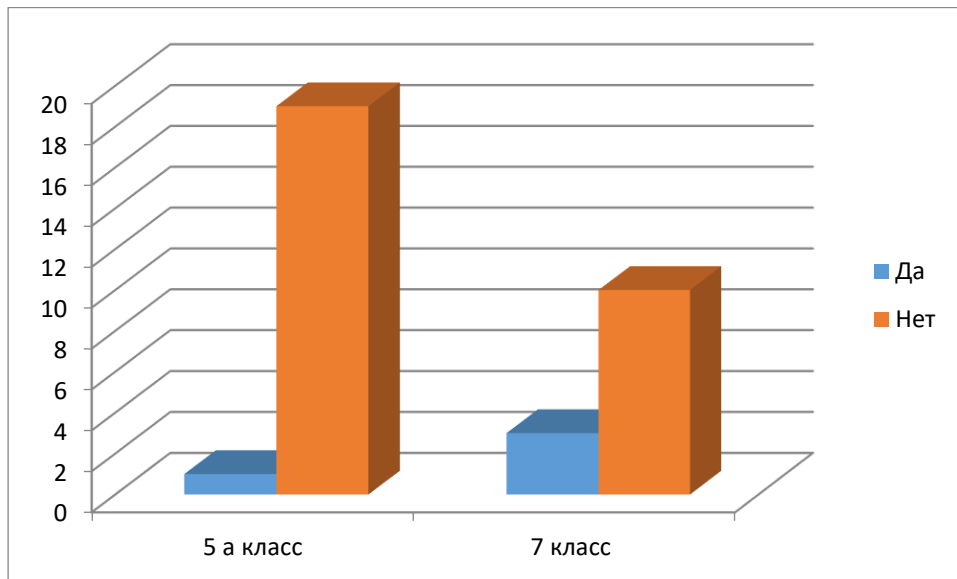
Тема моей работы далеко не исчерпана. Я рассмотрела лишь некоторые, самые известные примеры софизмов и парадоксов. На самом деле их намного больше. Я продолжу изучение этой темы в дальнейшем.

### **Список литературы**

1. А. Г. Мадера, Д. А. Мадера «Математические софизмы», Москва, «Просвещение», 2003г.
2. Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева Л. К. «Ошибки в математических рассуждениях».
3. Перельман Я. И. «Занимательная математика».
4. Горячев Д. Н., Воронец А. Н. «Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики», М., 1966.
5. Лямин А. А. «Математические парадоксы и интересные задачи», М., (1911г.) 2010 г.
6. [http://www.peterlife.ru/download%20free%20online/humanities/fl\\_5\\_a5.htm](http://www.peterlife.ru/download%20free%20online/humanities/fl_5_a5.htm)
7. [http://www.tmn.fio.ru/works/60x/306/06\\_2.htm](http://www.tmn.fio.ru/works/60x/306/06_2.htm)
8. <http://www.golovolomka.hobby.re/books/gardner/gotcha/ch2/02.html>

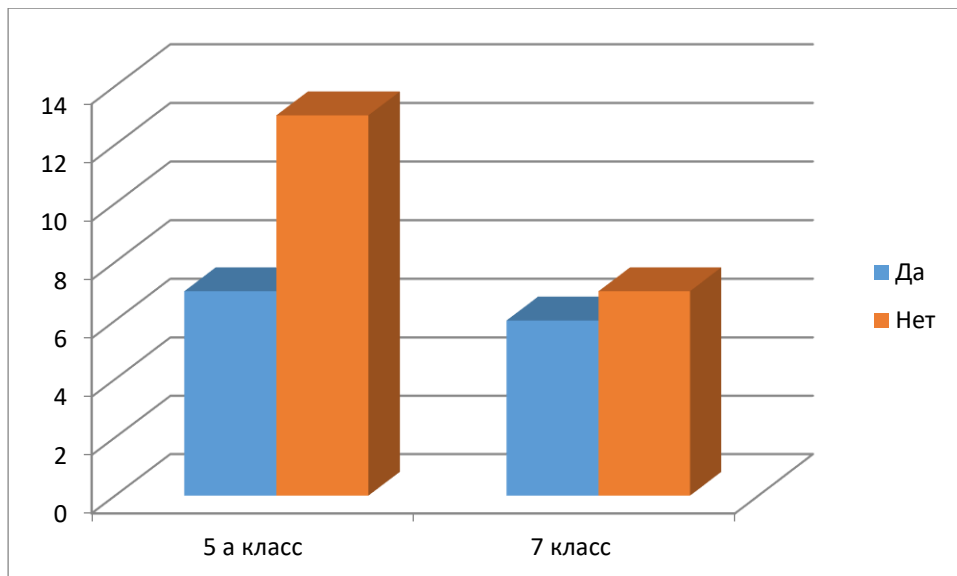
Проанализировав ответы на вопросы, мы получили следующие результаты:

**1 вопрос:** Знакомо ли Вам понятие «софизм»? (Да/Нет)



Из графика видно, что практически все ученики не знакомы с понятием софизма

**2 вопрос:** Знакомо ли Вам понятие «парадокс»? (Да/Нет)

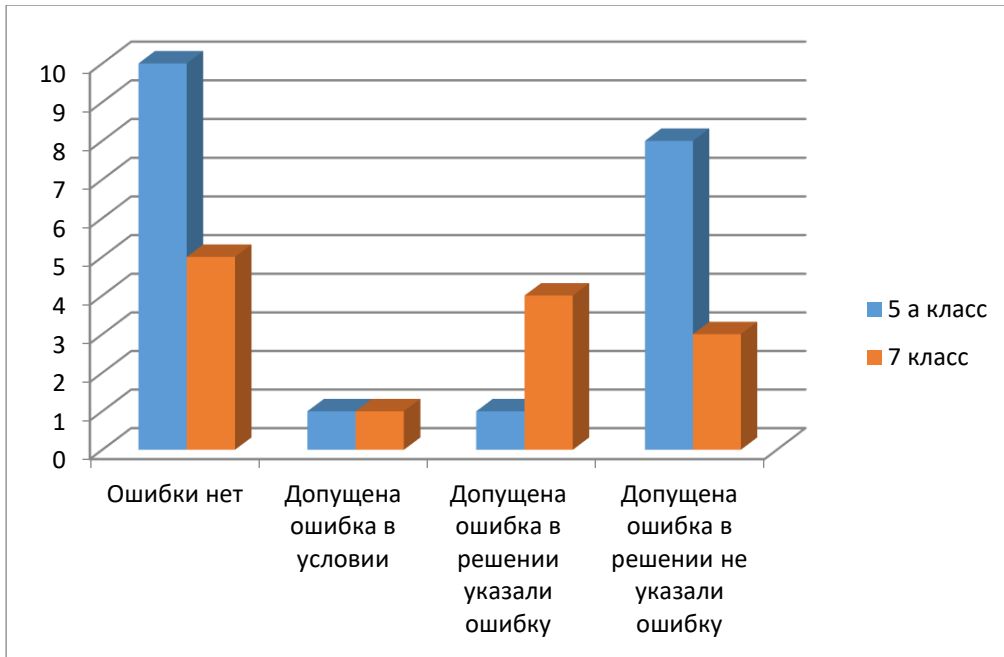


С понятием парадокс учащиеся сталкивались чаще, чем с понятием софизм.

**3 вопрос:** Возьмём числовое равенство:  $35+10-45=42+12-54$ .

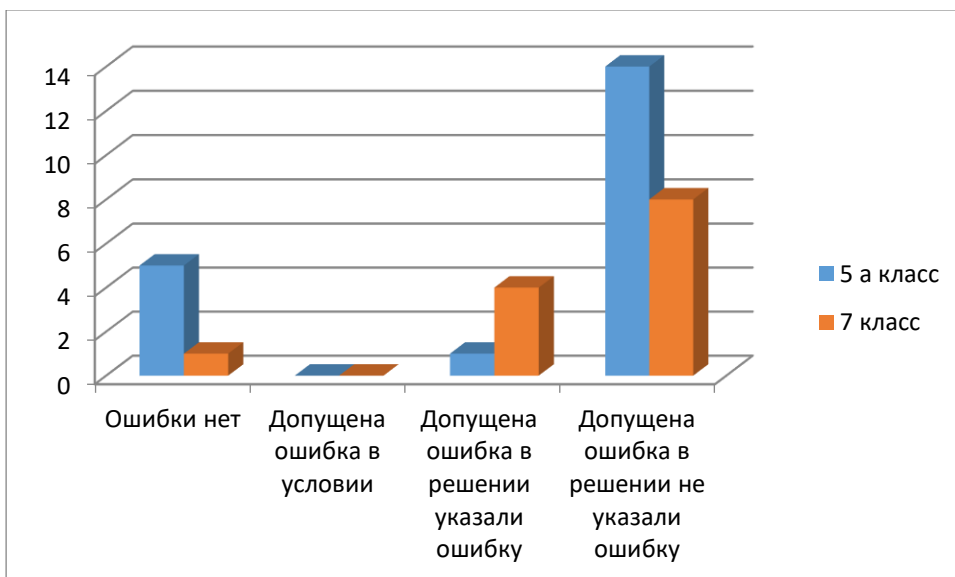
Вынесем общие множители левой и правой частей за скобки. Получим:

$5(7+2-9)=6(7+2-9)$ . Разделим обе части этого равенства на общий множитель (заключенный в скобки). Получаем  $5=6$ . Как Вы это объясните? (Ошибки нет/ Допущена ошибка в условии/ Допущена ошибка в решении (указать ошибку))



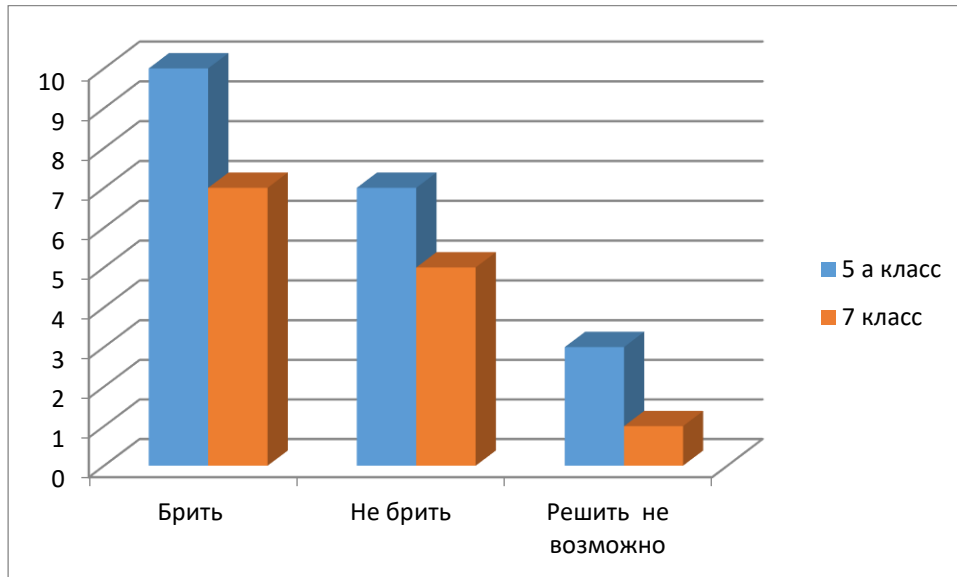
В этой задаче на внимательность нужно было найти конкретную математическую ошибку-  $7+2-9=0$ . На ноль делить нельзя. С данной задачей справились 1 ученик 5 а класса и 4 - 7 класса. При этом 10 учащихся все же нашли наличие ошибки в решении, но не указали ее точно.

**4 вопрос:** Дано уравнение  $x-a=0$ . Разделив обе части этого уравнения на  $x-a$ , получим, что  $1=0$ . Поскольку это равенство неверное, то это означает, что исходное уравнение не имеет корней. Допущена ли здесь ошибка, и если да, то какая? (Ошибки нет/ Допущена ошибка в условии/ Допущена ошибка в решении (указать ошибку))



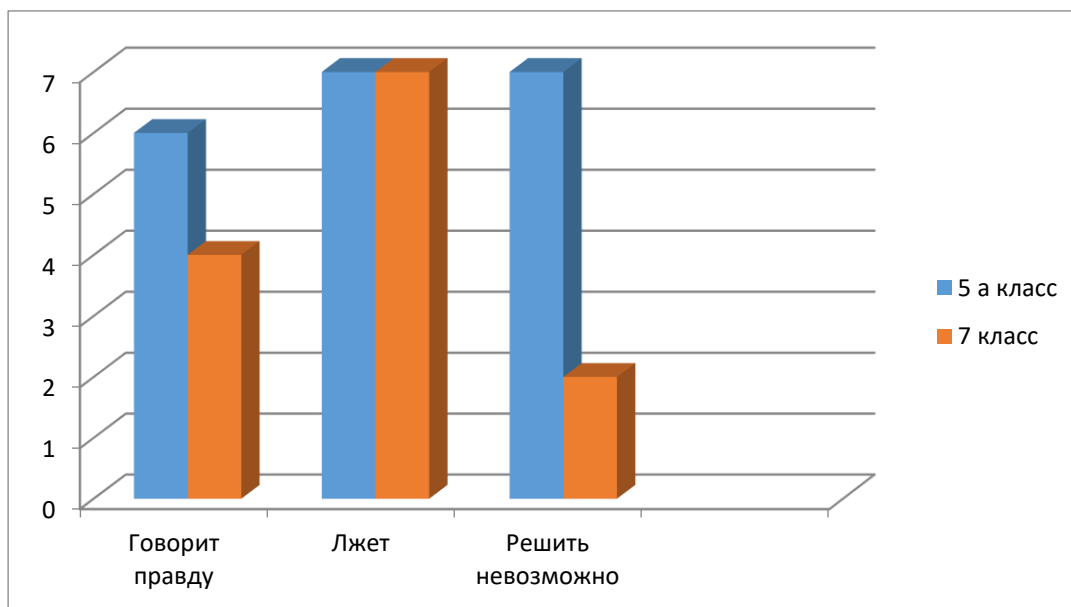
Ответом данной задачи было: Поскольку  $x=a$  – корень уравнения, то, разделив на выражение  $x-a$  обе его части, мы потеряли этот корень и поэтому получили неверное равенство  $1=0$ . Верно на этот вопрос ответили 1 5-классник и 4 7-классника, при этом наличие ошибки отметили 22 ученика обоих классов.

**5 вопрос:** Одному деревенскому брадобрю приказали «брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется». Как он должен поступить с самим собой? (Брить/ Не брить/ Решить невозможно)



Данный вопрос уже относился к понятию «парадокс». Итак, парадокс налицо: формально рассуждая, парикмахер не может не брить себя, и не не брить себя. Его смогли решить – 4 ученика.

**6 вопрос:** Человек произносит: «Я лгу». Он обманывает или говорит правду? (Говорит правду/ Лжет/ Решить невозможно).



В этом вопросе ученики 5 а класса разделились поровну на ответы к данной задаче, а 7 –классники больше склонялись к ответу «он говорит неправду».