II Международная конференция учащихся

«НАУЧНО-ТВОРЧЕСКИЙ ФОРУМ»

Научно-исследовательская работа

Математика

СОЗДАНИЕ ПАМЯТКИ ДЛЯ УЧАСТНИКОВ ЕГЭ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАЧ С НАЛИЧИЕМ ОТБОРА КОРНЕЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСИХ УРАВНЕНИЯХ

Выполнила:

Кондилеброва Вероника Данииловна

учащаяся 11 класса

МБОУ СОШ №15 Россия, г. Апатиты

Руководитель:

Доровских Наталья Михайловна

Учитель математики,

МБОУ СОШ №15 Россия, г. Апатиты

Введение

В учебной программе 10-го класса по математике при изучении тригонометрических уравнений рассматриваются способы отбора корней в них. В связи с небольшим количеством уроков по данной теме, предпочтение отдается только одному из способов отбора корней, использование которого не в каждом тригонометрическом уравнении может быть удобным. Вторая часть 13 задания не является сложной, при правильном решении которой можно получить 1 балл.

Я решила изучить и подготовить материал, благодаря которому участники ЕГЭ смогут сделать отбор корней быстрее и возможно качественнее.

Изучение информационных источников и уточнение темы: в процессе работы над данной темой была проанализирована основная учебная литература, которая позволила осмыслить и осуществить выполнение учебно-исследовательской работы. Знакомство с литературой в первую очередь было начато со школьного учебника [1], из которого я получила представление об основных вопросах, к которым примыкает избранная тема. Много интересной информации нашла на сайте https://math.ru/lib/book/djvu/istoria/istmat1.djvu

Актуальность: помощь при подготовке к решению 2 части 13 задания на экзамене по профильной математике.

Объект исследования: тригонометрические уравнения.

Предмет исследования: способы отбора корней в тригонометрических уравнениях.

В ходе исследования была выдвинута следующая **гипотеза:** если структурировать теоретический материал и оформить его в виде памятки, то ее использование поможет подготовиться к качественному выполнению второй части 13 задания на едином государственном экзамене по профильной математике.

Цель: создание памятки на основе четырех способов отбора корней в тригонометрических уравнениях.

В процессе работы были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. изучить способы отбора корней в тригонометрических задачах;
2. применить полученные знания при решении заданий с отбором корней;
3. разработать и создать памятку;
4. проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

В процессе работы использовались следующие **методы исследования:** теоретические (анализ и синтез), математические**.**

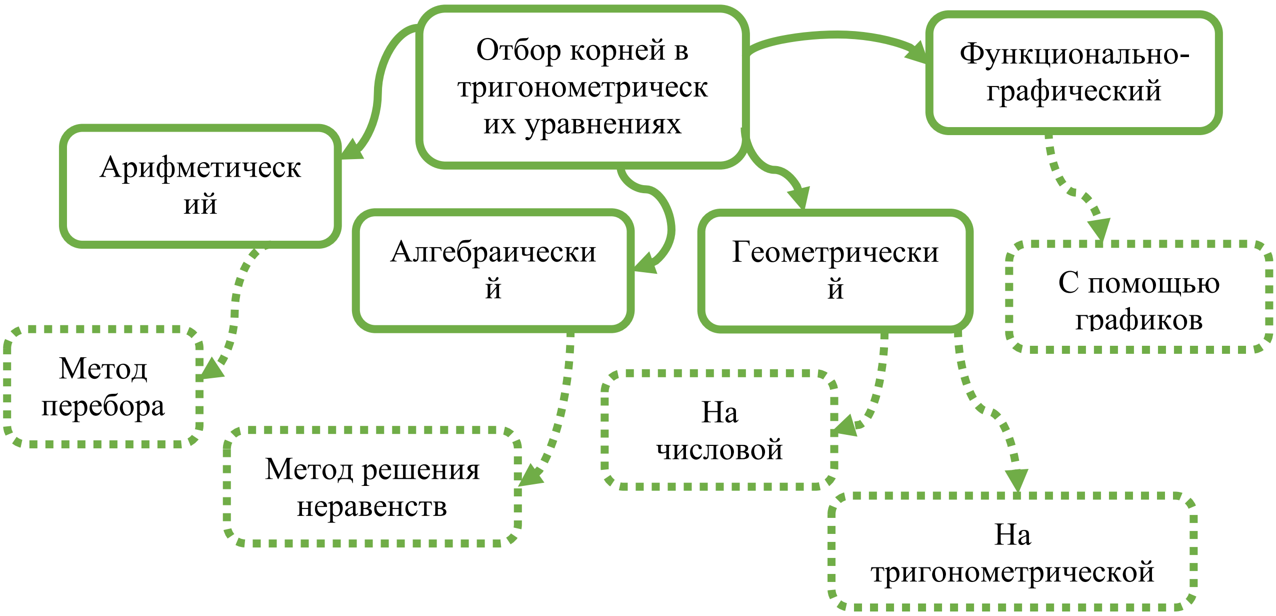
Основная часть

На раннем этапе тригонометрия развивалась в тесной связи с астрономией и являлась ее вспомогательным разделом. Долгое время тригонометрия носила чисто геометрический характер. Еще во II веке до нашей эры у астронома Гиппарха и у Птолемея во II нашей эры имелись полные систематические тригонометрические таблицы. Начиная с XVII века, тригонометрические функции начали применять к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники и так далее. Поэтому тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались, и приобрели важное значение для всей математики. Аналитическая теория тригонометрических функций в основном была создана выдающимся математиком XVIII веке Леонардом Эйлером (1707 -1783). Именно Эйлер первым ввел известные определения тригонометрических функций, стал рассматривать функции произвольного угла, получил формулы приведения. После Эйлера тригонометрия приобрела форму исчисления: различные факты стали доказываться путем формального применения формул тригонометрии, доказательства стали намного компактнее и проще.

Франсуа Виета (1540-1613) и Исаак Ньютон так же занимались данной темой, но больший вклад внес Леонард Эйлер [5].

Схема 1

Способы отбора корней



Арифметический способ

Данный способ отбора корней связан с вычислением корней при переборе значений целочисленного параметра или нахождением значений тригонометрических выражений непосредственной подстановкой при проверке корней**:**

перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней (подставляя поочередно значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 для переменной k, находим корни). [6]

Алгебраический способ

Алгебраический способ отбора корней наиболее удобен в тех случаях, когда последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям, промежуток для отбора корней большой, значения обратных тригонометрических функций, входящих в серии решений, не являются табличными, и при решении задач с дополнительными условиями: решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней. [6]

Геометрический способ

Геометрический способ отбора корней предполагает наличие у учащихся навыков изображения решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств на числовой окружности или прямой, поэтому необходимо знать основные действия с точками числовой окружности, связанные с формулами решений простейших тригонометрических уравнений:

- ✓ изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором и учетом имеющихся ограничений**;**
- ✓ изображение корней на числовой прямой с последующим отбором и учетом имеющихся ограничений. [6]

Функционально – графический способ

Отбор корней осуществляется с помощью графика простейших тригонометрических функций. Схематично изобразив графики функций, находим абсциссы точек пересечения этих графиков на указанном промежутке. [7]

№**1**. Найти корни уравнения $7\sin^2 x + 8\cos x - 8 = 0$, принадлежащие $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ [2]

$-7\cos^2 x + 8\cos x - 1 = 0$

Пусть $\cos x = t,$ $t \in [-1; 1]$

$7t^2 - 8t + 1 = 0$

$\mathcal{D} = 64 - 28 = 36$

$$t_1 = \frac{8+6}{14} = 1$$

$$t_2 = \frac{8-6}{14} = \frac{1}{7}$$

$\cos x = 1$ $\cos x = \frac{1}{7}$

$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = \pm\, arc\cos\frac{1}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) Сделаем отбор корней различными способами

Арифметический способ $\quad$ Геометрический способ с помощью числовой оси

1) $\boldsymbol{x = 2\pi n}, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\boldsymbol{x = \pm arc\cos\frac{1}{7} + 2\pi n}, n \in \mathbb{Z}$

$n = 1, x = 2\pi$ $\quad$ **2)** $x_1 = \arccos\frac{1}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$n = 0, x = 0$ $\quad$ **3)** $x_2 = -\arccos\frac{1}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$n = -1, x = -2\pi$

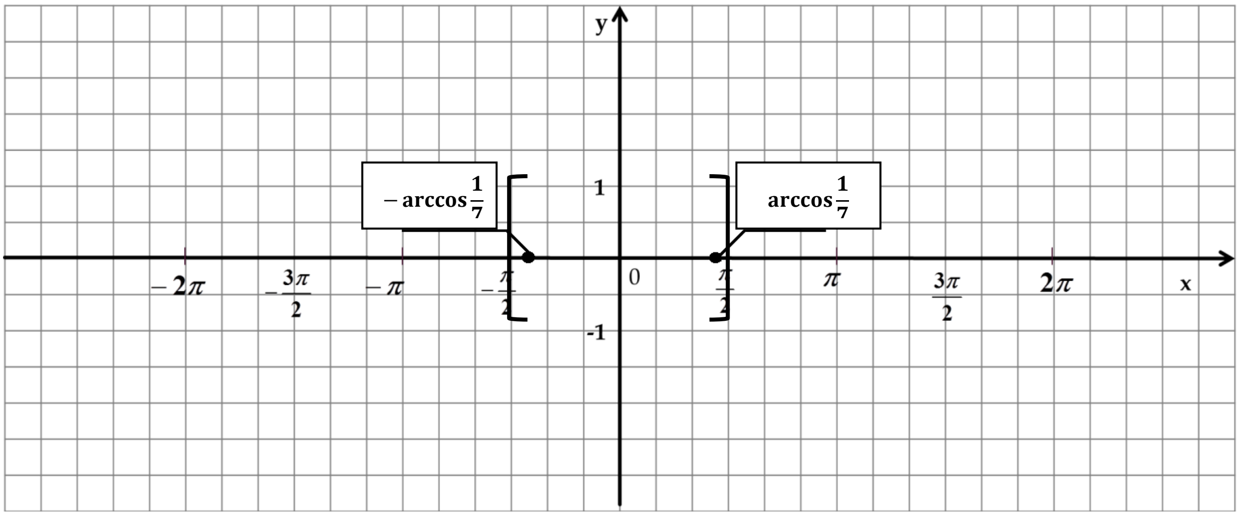


Рис. 1. Отбор корней с помощью числовой прямой

Ответ: а) $2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$; $\pm\, arc\cos\frac{1}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ б) $-\arccos\frac{1}{7}$; 0; $\arccos\frac{1}{7}$

Отбор корней в данном уравнении можно было выполнить и другими способами

Алгебраический способ

$\cos x = 1 \quad [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\boldsymbol{x = 2\pi n}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$$

$-\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{1}{2}$

$\mathrm{n} = 0$

$\mathrm{x} = 2\pi \cdot 0 = 0$

$\mathrm{x} = 0$

<u>Геометрический способ с помощью числовой окружности</u>

$\cos x = \frac{1}{7} \qquad [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\boldsymbol{x = \pm arc\cos\frac{1}{7} + 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$

$x_1 = \arccos\frac{1}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x_2 = -\arccos\frac{1}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

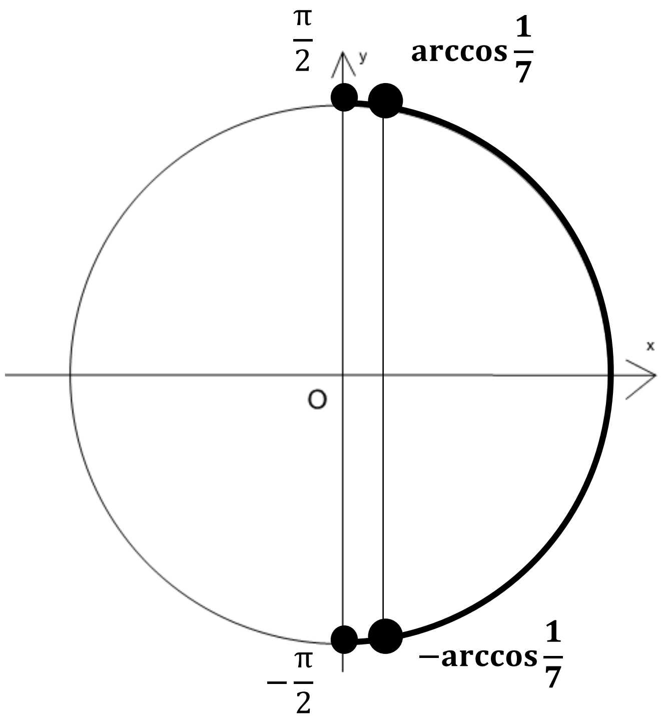


Рис. 2. Отбор корней с помощью числовой окружности

№2. Отбор корней $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ на $[-\pi : \pi]$ выполнен геометрическим способом с помощью числовой окружности

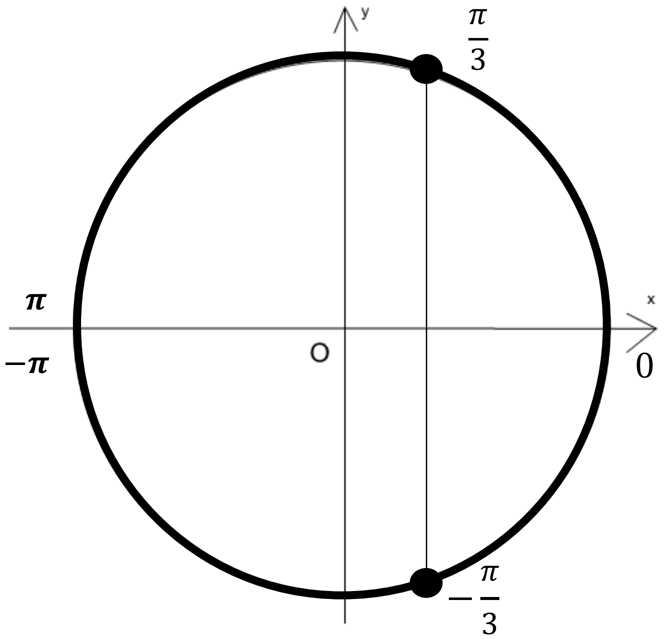


Рис. 3. Отбор корней с помощью числовой окружности

Ответ: $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$

№3. Отбор корней $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$ на $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ выполнен алгебраическим способом

$-\frac{3\pi}{2} \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 2\pi \mid \cdot 6$

$-9\pi \le -2\pi + 12\pi n \le 12\pi$

$-7\pi \le 12\pi n \le 14\pi \mid : \pi$

$-7 \le 12n \le 14 \mid : 12$

$-\frac{7}{12} \le n \le \frac{14}{12}$

$n = 0 \qquad x = -\frac{\pi}{3}$

$n = 1 \qquad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$

№4. Отбор корней $\sin x = \frac{1}{2}$ на $[-\pi; \pi]$ выполнен функционально-графическим способом

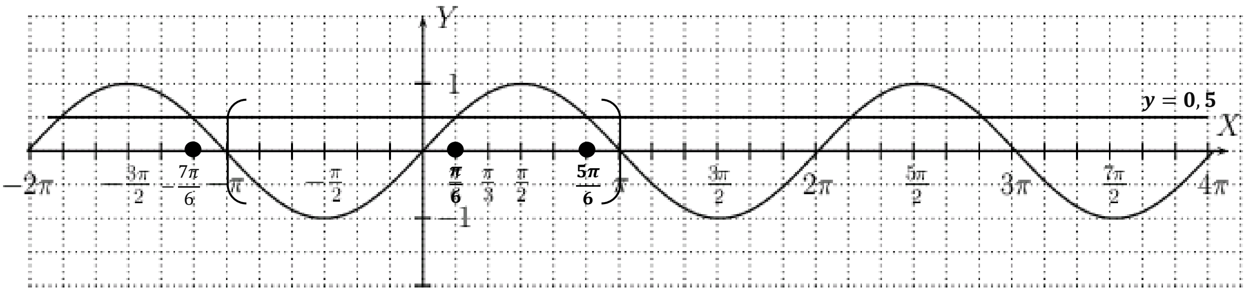


Рис. 4. Отбор корней с помощью графиков

Ответ: $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$; $\boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$

№1. Найти корни уравнения $6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ на $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ [3]

Ответ: $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$

№2. Найти корни уравнения $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$ на $[-3\pi; -\pi]$ [3]

Ответ: $-\arccos\frac{1}{6} - 2\pi;\ -2\pi;\ \arccos\frac{1}{6} - 2\pi$

№3. Найти корни уравнения $7\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ на $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ [3]

Ответ: $\frac{7\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{7} + 2\pi$

№4. Найти корни уравнения $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$ на $[\pi; 3\pi]$ [4]

Ответ: $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$

№5. Найти корни уравнения $\cos 2x + 2\cos^2 x - \sin 2x = 0$ на $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ [4]

Ответ: $\frac{9\pi}{4}$; - $\operatorname{arctg} 3 + 2\pi$

№6. Найти корни уравнения $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$ на $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ [4]

Ответ: $\frac{9\pi}{8}; \frac{5\pi}{4}; \frac{11\pi}{8}$

№7. Найти корни уравнения $tg^2x + 5tgx + 6 = 0$ на $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ [4]

Ответ: - arctg 3- π; - arctg $2 - \pi$

Заключение

Выдвинутая в процессе работы гипотеза о том, что если структурировать теоретический материал и оформить его в виде памятки, то ее использование поможет подготовиться к качественному выполнению второй части 13 задания на едином государственном экзамене по профильной математике, подтвердилась. Закончив исследование, я успешно справляюсь с этими заданиями на самостоятельных и контрольных работах. Моя работа вызвала интерес у одноклассников и многие из них пользуются ей.

Цель достигнута: создана памятка на основе четырех способов отбора корней в тригонометрических уравнениях.

Чтобы можно было применять памятку в любой момент я сделала её интерактивной, воспользовавшись сервисом «QR Code Generator»[8] и зашифровав её:

Благодаря этому можно мгновенно распознать сканером (мобильным телефоном) код и воспользоваться памяткой по выполнению задач с отбором корней в тригонометрическом уравнении, через приложение «Яндекс.Диск.»

Список литературы

1. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 4-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2019. – 424 с.: ил.

2. Алгебра и начала анализа. 10 кл.: Учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, И.Е. Федорова и др. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2019. – 384 с.: ил.
3. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Щестаков, Д. Э. Шноль; под ред. И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 247 [1] с. (Серия «ЕГЭ. 50 вариантов. Типовые тестовые задания»).
4. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Щестаков, Д. Э. Шноль; под ред. И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 215 [1] с. (Серия «ЕГЭ. 36 вариантов. Типовые тестовые задания»).
5. История математики [Эл. ресурс]. Режим доступа https://math.ru/lib/book/djvu/istoria/istmat1.djvu
6. Лекция А. Г. Корянова, А. А. Прокофьева [Эл. ресурс]. Режим доступа http://uoirbitmo.ru/upload/files/docs/le1-4_(1).pdf
7. Способы отбора корней [Эл. ресурс]. Режим доступа https://repetitor.1c.ru/blog/post20181015/
8. QR Code Generator [Эл. ресурс]. Режим доступа https://www.qr-code-generator.com

Приложение 1

Памятка

для участников ЕГЭ по выполнению задач с наличием отбора корней в тригонометрических уравнениях

Автор:
Кондиляброва Вероника Данииловна,
МБОУ СОШ №15, 10 класс
Руководитель:
Доровских Наталья Михайловна,
учитель математики МБОУ СОШ №15

Апатиты
2020

1 способ **Арифметический способ**

Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней (подставляя поочередно значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 для переменной n, находим корни).

$\mathbf{\cos x = 1}$ $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\boldsymbol{x = 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$

$n = 1, x = 2\pi = \frac{4\pi}{2} \notin [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$n = 0, x = 0$

$n = -1, x = -2\pi = -\frac{4\pi}{2} \notin [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

2 способ **Алгебраический способ**

Наиболее удобен в тех случаях, когда последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям или промежуток для отбора корней большой.

$\boldsymbol{\cos x = 1}$ $\qquad [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\boldsymbol{x = 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$

$-\frac{\Pi}{2} \leq 2\pi\text{n} \leq \frac{\pi}{2}$

$-\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{1}{2}$

$\text{n} = 0$

$\text{x} = 2\pi \cdot 0 = 0$

x = 0

3 способ **Геометрический способ**

Необходимо знать основные действия с точками числовой окружности и числовой прямой, связанные с формулами решений простейших тригонометрических уравнений.

С помощью числовой окружности

$\boldsymbol{\cos x = \frac{1}{7}}$ $\qquad [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\boldsymbol{x = \pm arc\cos\frac{1}{7} + 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$

$\boldsymbol{x_1 = \arccos\frac{1}{7} + 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$

$\boldsymbol{x_2 = -\arccos\frac{1}{7} + 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$

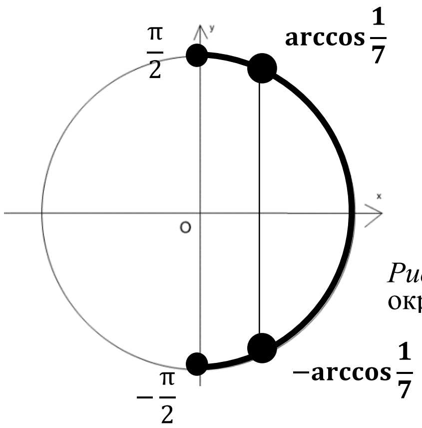


Рис. 1. Отбор корней с помощью числовой окружности

С помощью числовой прямой

$\boldsymbol{\cos x = \frac{1}{7}}$ $\qquad [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\boldsymbol{x = \pm\arccos\frac{1}{7} + 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$

$\boldsymbol{x_1 = \arccos\frac{1}{7} + 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$

$\boldsymbol{x_2 = -\arccos\frac{1}{7} + 2\pi n, n} \in \mathbb{Z}$

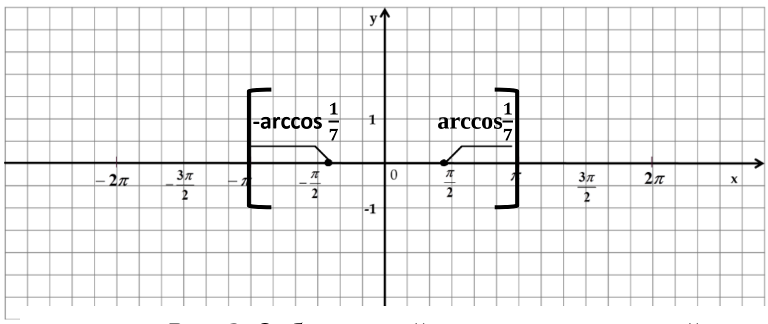


Рис. 2. Отбор корней с помощью числовой прямой

4 способ **Функционально-графический способ**

Отбор корней осуществляется с помощью графика простейших тригонометрических функций.

Найти корни уравнения sinx = $\frac{1}{2}$ на $[-\pi;\ \pi]$

Схематично изобразим графики функций y = sinx и y = $\frac{1}{2}$. Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций на указанном промежутке. Эти значения будут являться корнями уравнения на $[-\pi;\ \pi]$

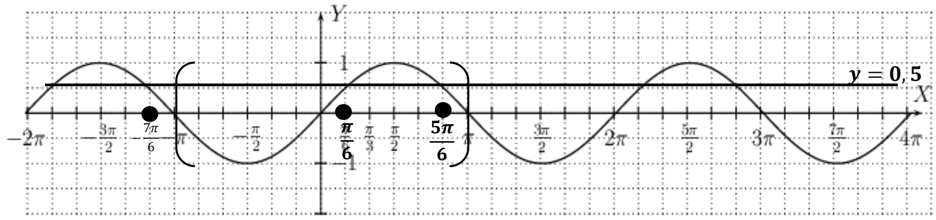


Рис. 3. Отбор корней с помощью графиков

Задания для самостоятельного решения

№1. Найти корни уравнения $6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ на $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$

№2. Найти корни уравнения $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$ на $[-3\pi; -\pi]$

Ответ: $-\arccos\frac{1}{6} - 2\pi;\ -2\pi;\ \arccos\frac{1}{6} - 2\pi$

№3. Найти корни уравнения $7\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ на $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: $\frac{7\pi}{4}$; $\mathrm{arctg}\frac{3}{7} + 2\pi$