Научно-исследовательская работа

Математика

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ЗАДАЧ ТРИГОНОМЕТРИИ

Выполнил:
учащийся 10 «А» класса,
Щерба Михаил Евгеньевич
Государственное учреждение образования
«Средняя школа №17 г.Лиды»

Руководитель:
Ненартович Марк Витольдович,
учитель математики, исследователь
педагогических наук,
Государственное учреждение образования
«Средняя школа №17 г.Лиды»

2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В математике выделяют различные подходы к решению задач. Среди них алгебраический и геометрический. Существует заблуждение о том, что алгебраический подход используется для решения задач из курса «Алгебры», а геометрический подход для решения задач из курса «Геометрии». Однако следует рассматривать данные два подхода в тесной взаимосвязи. Благодаря которой решение задач станет осознанным, наглядным и понятным.

Решение многих алгебраических задач может быть решено средствами геометрии. Что позволит учащимся осознать учебный материал и понимать, что стоит за той либо иной аналитической записью. Школьный курс геометрии является одной из богатейших возможностей способствующей ее использованию при решении задач алгебры, в частности тригонометрии. При качественном обучении учащихся решению тригонометрических задач требуется понимание и осознание учащимися условия.

Цель работы: изучить способы решения задач тригонометрии. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие *задачи*:

– проанализировать типы задач тригонометрии, встречающиеся в сборниках экзаменационного материала и централизованного тестирования;

– изучить геометрическую интерпретацию алгебраического выражения;

– рассмотреть возможность применения альтернативных способов решения задач тригонометрии;

Объект исследования – задачи раздела «Тригонометрия». *Предмет исследования* – решение тригонометрических задач. *Актуальность темы* состоит в необходимости интеграции алгебры и геометрии, то есть во взаимосвязи или синтезе этих двух великих наук. *Методы исследования*: частично-поисковый, исследовательский, сравнительный анализ, синтез, практический. Новизна данной работы заключается в подборе, составлении и решении задач по теме исследования, а теоретическая и практическая значимость работы состоит в использовании на факультативах, а также для подготовки к олимпиадам и экзаменам.

ГЛАВА 1. АННАЛИЗ ТИПОВ ЗАДАНИЙ РАЗДЕЛА «ТРИГОНОМЕТРИИ»

1.1 Анализ типов заданий сборника экзаменационных материалов за период обучения и воспитания на III ступени общего среднего образования

Анализ заданий сборника экзаменационных материалов для выпускного экзамена по учебному предмету «Математика» [6] позволил выделить следующие типы заданий по разделу «Тригонометрии» на базовом уровне:
решение тригонометрических уравнений; соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом; нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса для определенного значения аргумента; нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса аргумент которых содержит обратные тригонометрические функции; нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса аргумент которых представлен в виде двойного угла (обратная тригонометрическая функция); упрощение выражений; комбинированные задания.

На повышенном уровне (для профильных классов): решение тригонометрических уравнений; соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом; нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса для определенного значения аргумента; нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса аргумент которых содержит обратные тригонометрические функции; нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса аргумент которых представлен в виде двойного угла (обратная тригонометрическая функция); упрощение выражений; комбинированные задания.

Количественное отношение данных заданий представлено на диаграмме (диаграмма 1, 2). Анализ данной диаграммы показывает, что большую часть заданий тригонометрии составляют задания типа «решить тригонометрические уравнения». Задания же типа «соотношение тригонометрических функций», «нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса аргумент которых содержит обратные тригонометрические функции», «нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса аргумент которых представлен в виде двойного угла» составляют 22 % от общего количества заданий данного типа.

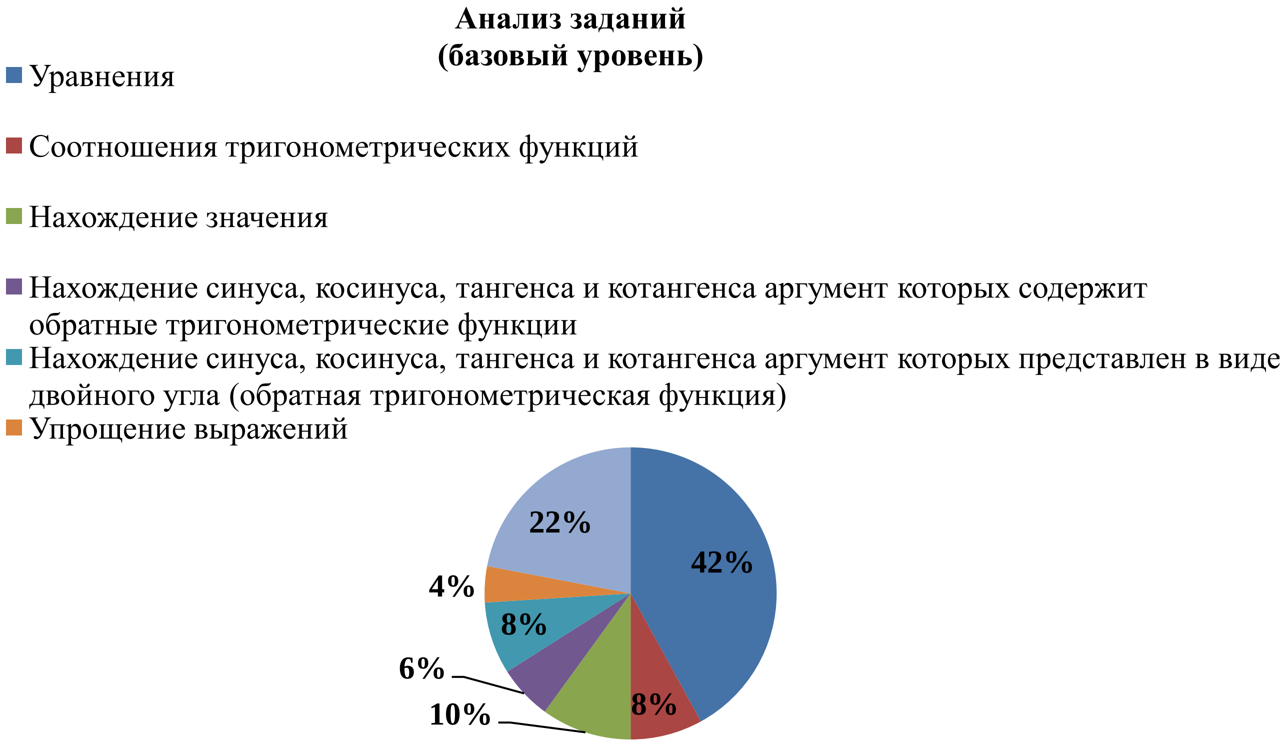


Диаграмма 1

Диаграмма 2

Анализ данной диаграммы показывает, что большую часть заданий тригонометрии составляют задания типа «решить тригонометрические уравнения». Задания же типа «соотношение тригонометрических функций», «нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса аргумент которых содержит обратные тригонометрические функции», «нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса аргумент которых представлен в виде двойного угла» составляют 21 % от общего количества заданий данного типа.

Данные типы заданий требуют от учащихся знаний большого количества формул, а самое главное не формальное их запоминание, а осознание того, что необходимо найти. Поэтому встает вопрос об упрощении решений данного типа заданий либо отыскания альтернативных способов их решения.

Таким образом, в данном параграфе проведен анализ типов заданий раздела тригонометрии встречающиеся в сборнике экзаменационных материалов за период обучения и воспитания на III ступени общего среднего образования.

1.2 Анализ типов заданий централизованного тестирования раздела «Тригонометрия»

Анализ заданий централизованного тестирования [1-5, 7, 8] показал, что за последние 10 лет присутствуют следующие типы заданий:

—Нахождение значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса содержащих в аргументе обратные тригонометрические функции.

Задание. 2008 год. Вариант 1. В3. Вычислить: $10\sqrt{11}tg\left(\arccos\frac{5}{6}\right)$ [5].

—Нахождение значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса содержащих в аргументе двойной угол.

Задание. 2009 год. Вариант 1. В 1. Вычислить: $32\cos\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$[5].

—Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.

Задание. 2010 год. Вариант 1. А 8. Найдите $\cos\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{7}{9}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ [5].

—Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.

Задание. 2012 год. Вариант 1. В 8. Найдите значение выражения $16\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha = \frac{23}{32}$, $2\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ [5].

—Решение уравнений.

Задание. 2014 год. Вариант 1. В 8. Найдите количество корней уравнения $\cos x = \left|\frac{x}{11\pi}\right|$ [4].

Задание. 2015 год. Вариант 1. В 9. Найдите количество корней уравнения $\cos x = -\frac{x}{16\pi}$ [2].

Проведенный анализ заданий показал, что в 2008-2010, 2012, 2014 и 2015 году присутствовали задания раздела «Тригонометрии», которые можно было бы решить альтернативным способом. Таким образом, в данном параграфе проведен анализ типов заданий раздела тригонометрии встречающиеся на централизованном тестировании.

ГЛАВА 2. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

2.1 Вычисление выражений содержащих простейшие обратные тригонометрические функции

Рассмотрим *алгоритм решения* заданий на нахождение значения выражений содержащих простейшие обратные тригонометрические функции.

Задача. Вычисление выражений содержащих простейшие обратные тригонометрические функции. **Дано:** угол равный арксинусу, арккосинусу, арктангенсу и арккотангенсу. **Найти:** определить значение тригонометрической функции данного угла.

Алгоритм решения заданий данного типа:

1. Находим значение функции синуса, косинуса, тангенса и котангенса соответствующего угла.

2. Строим прямоугольный треугольник, используя определение и данные значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

3. Находим недостающие элементы прямоугольного треугольника используя теорему Пифагора.

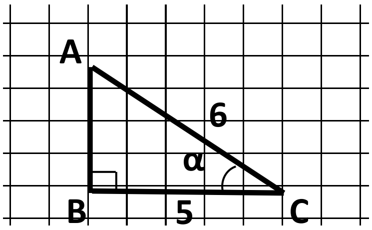
4. Вычисляем значение угла требуемой тригонометрической функции.

5. Находим значение выражения.

Задание 1. Вычислить значение выражения: $18\sqrt{11}\cdot tg(\arccos\frac{5}{6})$.

Решение. 1. $\arccos\frac{5}{6}=\alpha$, значит $\cos\alpha=\frac{5}{6}$, значит прилежащий катет к углу α равен 5, а гипотенуза 6;

2. Построение наглядной модели, соответствующей условию:

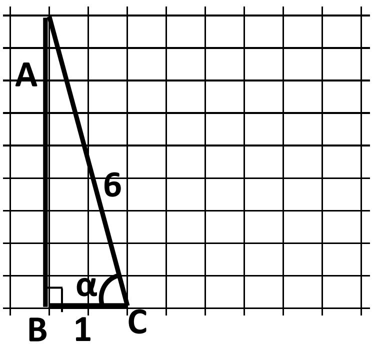


3. $\cos\alpha=\frac{BC}{AC}$, $BC=5$, $AC=6$. $tg\alpha=\frac{BC}{AB}$, по т. Пифагора $AC^2=AB^2+BC^2$, $AB=\sqrt{11}$

4. $tg\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{\sqrt{11}}$. 5. $18\sqrt{11}\cdot tg\alpha=18\sqrt{11}\cdot\frac{5}{\sqrt{11}}=90$. Ответ: 90.

Задание 2. Вычислить значение выражения: $6\sqrt{35}\cdot ctg(\arccos\frac{1}{6})$.

Решение. 1. $\arccos\frac{1}{6}=\alpha$, $\cos\alpha=\frac{1}{6}$, значит прилежащий катет к углу α равен 1, гипотенуза 6; 2. Построение наглядной модели, соответствующей условию:



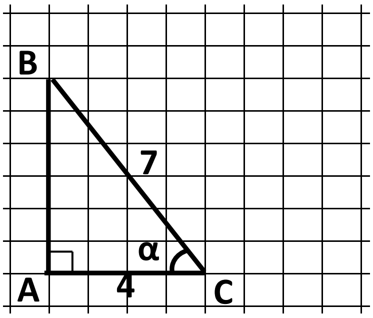
3. $\cos\alpha = \dfrac{BC}{AC}, BC = 1, AB = 6$, по т. Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$, отсюда $AB = \sqrt{35}$;

4. $ctg\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{35}}$; 5. $6\sqrt{35}\cdot ctg(\alpha) = 6\sqrt{35}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{35}} = 6$. Ответ: 6.

Задание 3. Вычислить значение выражения: $7\cdot\sin(\arccos\dfrac{4}{7})$.

Решение. 1. $\arccos\dfrac{4}{7} = \alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{7}$, значит прилежащий катет к углу α равен 4, гипотенуза 7;

2.

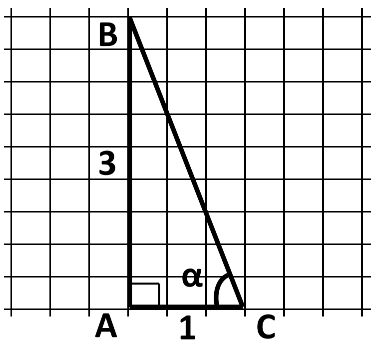


3. $\cos\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{7}, AC = 4, BC = 7$ по т. Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $AB = \sqrt{33}$,

$\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{33}}{7}$; 4. $7\cdot\sin(\arccos\dfrac{4}{7}) = 7\cdot\sin\alpha = 7\cdot\dfrac{\sqrt{33}}{7} = \sqrt{33}$. Ответ: $\sqrt{33}$.

Задание 4. Вычислить значение выражения: $ctg(arctg3)$.

Решение. 1. $arctg3 = \alpha$, значит $tg\alpha = 3$, следовательно противолежащий катет будет равен 3, а прилежащий 1; 2. Построение наглядной модели, соответствующей условию:



3. $tg\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{1}$, значит $AB = 3, AC = 1$, $ctg\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{3}$; 4. $ctg(arctg3) = ctg\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

2.2 Вычисление выражений содержащих в качестве аргумента двойной либо половинный угол обратной тригонометрической функции

Рассмотрим *алгоритм* решения заданий на нахождение значения выражений содержащих в аргументе двойной угол обратной тригонометрической функции.

Задача. Вычислить тригонометрические выражения содержащие в аргументе двойной угол обратной тригонометрической функции

Дано: двойной угол содержащий арксинусу, арккосинусу, арктангенсу и арккотангенсу. **Найти:** определить значение выражения.

Алгоритм решения заданий данного типа:

1. Находим значение функции синуса, косинуса, тангенса и котангенса соответствующего угла.

2. Строим прямоугольный треугольник, используя определение и данные значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

3. Находим недостающие элементы прямоугольного треугольника используя теорему Пифагора.

4. Достраиваем данный прямоугольный треугольник до равнобедренного, получая двойной угол.

5. Вычисляем значение двойного угла требуемой тригонометрической функции используя теорему синусов либо теорему косинусов.

6. Находим значение исходного выражения.

Рассмотрим *алгоритм* решения заданий на нахождение значения выражений содержащих в аргументе половинный угол обратной тригонометрической функции.

Задача. Вычислить тригонометрические выражения содержащие в аргументе половинный угол обратной тригонометрической функции

Дано: половинный угол содержащий арксинусу, арккосинусу, арктангенсу и арккотангенсу. **Найти:** определить значение выражения.

Алгоритм решения заданий данного типа:

1. Находим значение функции синуса, косинуса, тангенса и котангенса соответствующего угла.

2. Строим прямоугольный треугольник, используя определение и данные значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

3. Находим недостающие элементы прямоугольного треугольника используя теорему Пифагора.

4. Проведем биссектрису угла и воспользуемся свойством биссектрисы в прямоугольном треугольнике.

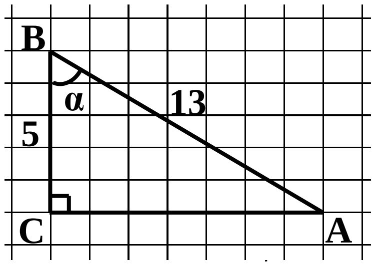
5. Вычисляем значение половинного угла требуемой тригонометрической функции используя свойства биссектрисы прямоугольного треугольника.

6. Находим значение исходного выражения.

Задание 1. Вычислить значение выражения: $ctg(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13})$.

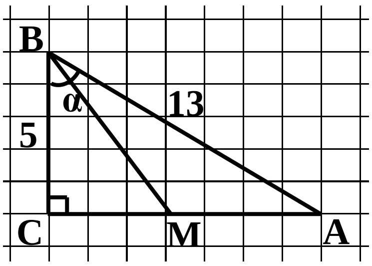
Решение. 1. $\arccos\frac{5}{13}=\alpha$, значит $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, значит прилежащий катет к углу α равен 5, а гипотенуза 13;

2. Построение наглядной модели, соответствующей условию:



3. $\cos\alpha=\frac{BC}{AB}$, значит $BC=5,\ AB=13$. По т. Пифагора $AB^2=AC^2+BC^2$, $AC=12$.

4. Проведем биссектрису BM угла $\angle CBA$ и воспользуемся свойством биссектрисы в прямоугольном треугольнике.



5. $\frac{BC}{AB}=\frac{CM}{AM}$, $\frac{5}{13}=\frac{CM}{AM}$, пусть $CM=5\cdot x$, $AM=13\cdot x$, $AC=CM+MA$, $12=5\cdot x+13\cdot x$

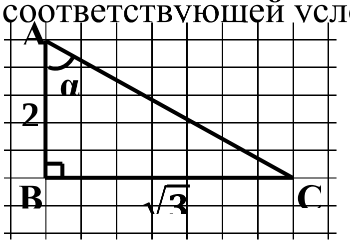
отсюда получаем $x=\frac{2}{3}$.

Следовательно $CM=5\cdot x=5\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$. $\frac{\alpha}{2}=\angle CBM$, $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{BC}{CM}$, $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{3\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

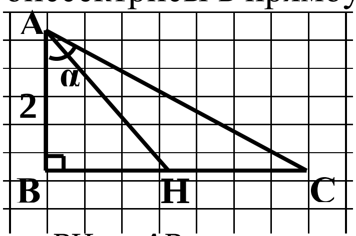
Задание 2. Вычислить значение выражения: $\cos(\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Решение. 1. $arctg\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha$, значит $tg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, значит противолежащий катет к углу α равен $\sqrt{3}$, а прилежащий 2; 2. Построение наглядной модели, соответствующей условию:



3. $tg\alpha=\frac{BC}{AB}$, значит $BC=\sqrt{3}$, $AB=2$. По т. Пифагора $AC^2=AB^2+BC^2$, $AC=\sqrt{7}$.

4. Проведем биссектрису AH угла $\angle BAC$ и воспользуемся свойством биссектрисы в прямоугольном треугольнике.



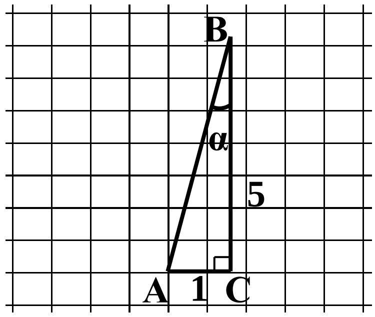
5. $\frac{BH}{HC}=\frac{AB}{AC}$, получаем $\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{BH}{HC}$, пусть $BH=2\cdot x$, $HC=\sqrt{7}\cdot x$

$BC=BH+HC$, $2+\sqrt{7}=2\cdot x+\sqrt{7}\cdot x$ отсюда получаем $x=1$.

Следовательно $BH=2\cdot x=2\cdot 1=2$. Рассмотрим ΔABH, $AB=2$, $BH=2$, по теореме Пифагора $AH=2\sqrt{2}$. $\frac{\alpha}{2}=\angle BAH$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{AB}{AH}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

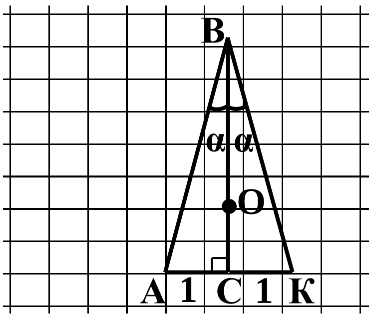
Задание 3. Вычислить значение выражения: $\sin(2arctg\frac{1}{5})$.

Решение. 1. $arctg\frac{1}{5}=\alpha$, значит $tg\alpha=\frac{1}{5}$, значит противолежащий катет к углу α равен 1, а прилежащий 5; 2. Построение наглядной модели, соответствующей условию:



3. $tg\alpha=\frac{AC}{BC}$, значит $AC=1,\ BC=5$. По т. Пифагора $AB^2=AC^2+BC^2$, $AB=\sqrt{26}$.

4. Достраиваем данный прямоугольный треугольник до равнобедренного, получая двойной угол $\angle ABK=2\alpha$.



5. $AK=2,\frac{AK}{\sin 2\alpha}=2R,\ OB=R=\frac{10}{3}$, получаем $\frac{2}{\sin 2\alpha}=\frac{20}{3}$, отсюда $\sin 2\alpha=\frac{3}{10}=0{,}3$

Ответ: $0{,}3$.

2.3. Вычисление значений тригонометрических выражений сводящихся к использованию формул суммы

Рассмотрим *алгоритм решения* заданий на нахождение значения выражений сводящихся к использованию формул суммы.

Дано: выражение сводящееся к применению формул суммы. **Найти:** определить значение выражения.

Алгоритм решения заданий данного типа:

1. Выполнение построение модели двух треугольников с общей вершиной (так, что бы одни из сторон треугольников лежали на одной прямой).

2. Находим неизвестные элементы треугольников.

3. Занимаемся поиском неизвестных элементов.

Пример 1. Найдите значение выражения: $ctg\left(\arcsin\frac{3}{5}+arctg\frac{1}{2}\right)$.

Решение. 1. Пусть $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$, тогда $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

Построим модель прямоугольного треугольника с углом α, так чтобы $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, т.е. противолежащий катет к углу α и гипотенуза пропорциональны числам 3 и 5 (Рисунок 1).

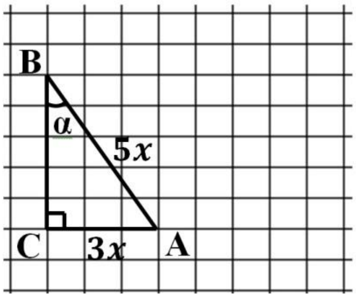


Рисунок 1

2. Пусть $arctg\frac{1}{2}=\beta$, тогда $tg\beta=\frac{1}{2}$. Построим модель прямоугольного треугольника с углом β, так чтобы $tg\beta=\frac{1}{2}$, т.е. противолежащий катет и прилежащий должны быть пропорциональны числам 1 и 2 ($\angle ADM=\beta$). При этом один из катетов лежит на продолжении катета AC (Рисунок 2).

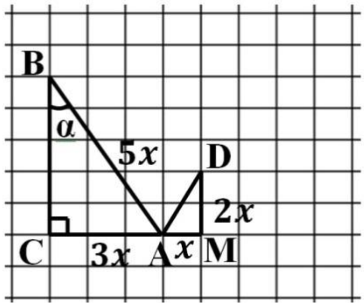


Рисунок 2

3. Таким образом задание сводится к нахождению значения выражения вида $ctg(\alpha+\beta)$.

4. Рассмотрим ΔABC, по теореме Пифагора $CB=4x$.

5. Рассмотрим ΔADM, по теореме Пифагора $AD=\sqrt{5}x$.

6. Из вершины D прямоугольного треугольника ΔADM проведем прямую $l, l\perp CB, l\cap CB=H$. Соединим вершины треугольников B и D. Проведем прямую $m, A\in m, m\parallel CB, m\parallel MD$ (Рисунок 3).

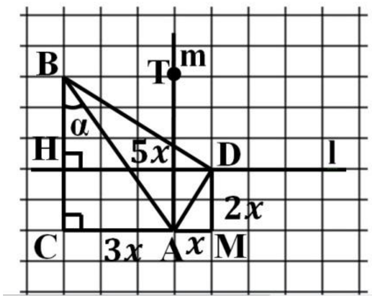


Рисунок 3

7. $\alpha+\beta=\angle BAD$, так как $\angle CBA=\angle BAT=\alpha$, как внутренние накрест лежащие при пересечении $CB \parallel m$, секущей BA, а так же $\angle MDA=\angle TAD=\beta$, как внутренние накрест лежащие при пересечении $DM \parallel m$, секущей AD. Следовательно наша задача сводится к нахождению $ctg\angle BAD$.

8. Рассмотрим ΔBHD, по теореме Пифагора $BD=2\sqrt{5}x$.

9. Рассмотрев ΔBAD и применив теорему косинусов получаем, $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, тогда $\sin\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. По определению котангенса $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе написания работы, мы рассмотрели возможность решения задач тригонометрии по средствам знаний геометрии: с различным уровнем сложности, с различной тематикой задачи, с неизвестными, с углами, с переменными и т.д. В данной работе отобраны задачи, которые наиболее ярко отображают всю красоту, наглядность и осознанность решения. Все они довольно легко решаются, если перевести их на геометрический язык.

Для решения задач тригонометрии с использованием знаний геометрии нам понадобилось вспомнить некоторые теоремы, признаки, свойства, формулы: теорема Пифагора, признаки равнобедренного треугольника, свойства прямоугольного треугольника и т.д. Данный способ является альтернативным на ряду с алгебраическим, помогает найти быстрое облегченное решение алгебраической задачи.

Таким образом написание исследовательской работы позволило взглянуть на решение тригонометрических задач со стороны знаний геометрии. А также повторить и закрепить имеющиеся знания по этим темам. Задания и способы их решения, которые мы рассматривали в своей работе, очень краткие и доступные для каждого из учащихся 10-11 класса. Именно они помогут подготовиться ученикам к решению некоторых заданий из школьной программы, а самое главное, к сдаче ЦТ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2019. – 45 с.

2. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2015. – 39 с.

3. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2018. – 33 с.

4. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2014. – 39 с.

5. Централизованное тестирование. Математика: полный сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2014. – 209 с.

6. Сборник заданий для выпускного экзамена по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на III ступени общего среднего образования / сост. В.В. Беняш-Кривец; под ред. В.В.Беняш-Крицец. – 3-е изд. – Минск: НИО: Аверсэв, 2019. – 155 с.

7. Спецификация теста по учебному предмету «Математика» для проведения централизованного тестирования в 2020 году / И.В. Карпенко – 2020. – 10 с.

8. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2016. – 37 с.