Научно-исследовательская работа

Математика

РЕШАЕМ УСТНЫМ СЧЕТОМ «ТРУДНУЮ ЗАДАЧУ»

Выполнил:

Богачев Владимир Александрович

учащийся 8 класса

МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 33» г. Калуги

Руководитель

Семешина Мария Владимировна

МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 33» г. Калуги

Введение

Счет и вычисления - основа порядка в голове
Песталоцци[1]

Математика – одна из древнейших наук. За долгую историю своего существования она знала периоды рассвета и длительного застоя. Грандиозны и разнообразны практические приложения математики.

Математика дисциплинирует ум, приучает логическому мышлению. Недаром говорил А.В. Суворов, что математика – это гимнастика ума. Какую бы науку мы ни изучали, в какой бы вуз не хотели бы поступать, в какой бы области ни работали, везде необходимо знание математики. Нам требуется считать ежедневно: дома, в школе, в транспорте, в магазине, на почте и т. д. Современные компьютерные технологии не освобождают нас от необходимости овладения вычислительной культурой. Одно из основных требований к вычислительной культуре – не допускать грубых просчетов, знать основы алгоритмических действий, уметь использовать запас накопившихся числовых представлений.

В нашей школе в холле на самом видном месте висит картина художника Н.П. Богданова – Бельского «Устный счет». Она невольно заставляет каждого, кто проходит мимо, обращать на себя внимание. Меня очень удивляло, что в старые времена такие задания предлагали для устного счета, и я не верил, что современный школьник может справиться с этим заданием устно. Но в прошлом году я понял, что задание вполне посильное, достаточно найти закономерность заданных чисел.

Цель работы:

Исследовать особенности и закономерности данной последовательности целых чисел и найти аналогичные последовательности, обладающие подобными свойствами.

Для достижения цели поставлены следующие **задачи**:

[1] https://www.sites.google.com/site/filosofiamatematiki/interesnye-fakty-o-matematike-1/vyskazyvania-velikih-ludej-o-matematike

1. Рассмотреть картину Н.П. Богданова – Бельского «Устный счет» и найти объяснение решению устным счетом заданного на ней выражения.

3. Выяснить, существуют ли аналогичные последовательности, обладающие свойством изображенного на картине выражения.

3. Исследовать закономерности других последовательностей чисел для вычисления суммы их квадратов и кубов.

Основная часть

1. Н.П. Богданов – Бельский и его картина

Картина «Устный счет» написана в 1895 году известным русским художником Николаем Петровичем Богдановым-Бельским. Полное название знаменитой картины: «Устный счет. В народной школе С. А. Рачинского»[2] (Приложение), другое название картины – «Трудная задача»[3]. В настоящее время ее оригинал хранится в Третьяковской галерее.

Николай Петрович Богданов-Бельский родился в 1868 году в Бельском уезде Смоленской губернии.[4] Свое начальное образование он получил среди крестьянских детей в Татевской школе Смоленской губернии, где работал Сергей Александрович Рачинский (1833—1902), ботаник и математик, профессор Московского университета. В 1872 году С.А. Рачинский в родном селе Татево создал школу для крестьянских детей, разработал уникальную методику обучения устному счёту, прививая деревенским ребятишкам навыки и основы математического мышления.[5] В память о творческой атмосфере, царившей на уроках, и создал своё произведение «Устный счет» Богданов-Бельский, который сам был учеником Рачинского.

На картине изображена деревенская школа конца 19 века во время урока арифметики при решении дроби в уме. Очень хорошо передана непринужденная обстановка урока. На втором плане картины – учитель –

---

[2] https://4brain.ru/blog/картина-устный-счет/
[3] https://rusmuseumvrm.ru/data/events/2016/03/istoriya_odnogo_shedevra_ustniy_schet_v_narodnoy_shkole_sarachinskogo/
[4] http://gorenka.org/index.php/bogdanov-belskij-n-p
[5] https://ru.wikipedia.org/wiki/Устный_счёт._В_народной_школе_С._А._Рачинского

С.А. Рачинский, у классной доски группа деревенских мальчиков. Все дети сосредоточенно думают, застыв в различных позах. Ведь так хочется каждому из них первым или одним из первых, сказать на ухо любимому учителю результат своего вычисления.

На доске записан пример, над которым размышляют дети. Пример действительно труден, но интересен:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$$

Один из мальчиков наклонился к уху учителя. Он опередил своих товарищей и шепчет правильный ответ.

2. Исследование закономерности данной последовательности чисел

Можно заметить, что числа 10, 11, 12, 13, 14 обладают любопытной особенностью: сумма квадратов первых трех из них равна сумме квадратов последних:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

Так как 100 + 121 + 144 = 365, и 169 + 196 = 365, то легко увидеть, что числитель дроби в два раза больше знаменателя, т.е. значение изображенного на картине выражения равно 2.

Алгебра дает нам средство поставить вопрос об этой особенности ряда чисел более широко: а единственный ли это ряд из пяти последовательных чисел, сумма квадратов первых трех из которых равна сумме квадратов двух последних?

Ответ на этот вопрос я решил найти с помощью уравнения.

Обозначим последовательные числа следующим образом (для удобства я обозначил за X среднее число).

1 число - (X – 2)

2 число - (X – 1)

3 число - X

4 число - (X + 1)

5 число - (X + 2)

Так как сумма квадратов первых трех чисел должна равняться сумме квадратов двух последних, то составим и решим уравнение:

$$(X-2)^2+(X-1)^2+X^2=(X+1)^2+(X+2)^2$$

$$X^2-4X+4+X^2-2X+1+X^2=X^2+2X+1+X^2+4X+4,$$

$$X^2-12X=0,$$

$$X(X-12)=0,$$

$$X_1=0;\ X_2=12.$$

Итак, имеем два решения данного уравнения, что позволяет составить два выражения.

Одно уже известное нам, увиденное на картине, это 10, 11, 12, 13, 14.

Второе решение – это ряд чисел -2, -1, 0, 1, 2.

В самом деле,

$(-2)^2+(-1)^2+0^2=1^2+2^2=5$. Таким образом, других чисел, обладающих таким свойством, нет.

3. Поиск других закономерностей последовательностей целых чисел

На картине мы видим 5 чисел. Я решил исследовать аналогичную закономерность для 7, 9, 11 и т.д. последовательных целых чисел. И у меня получилось следующее.

Пусть $(X-3)$; $(X-2)$; $(X-1)$; X; $(X+1)$; $(X+2)$; $(X+3)$ семь последовательных целых чисел, тогда

$$(X-3)^2+(X-2)^2+(X-1)^2+X^2=(X+1)^2+(X+2)^2+(X+3)^2$$

$$X^2-6X+9+X^2-4X+4+X^2-2X+1+X^2=X^2+2X+1+X^2+4X+4+X^2+6X+9,$$

$$X^2-24X=0,$$

$$X(X-24)=0,$$

$$X_1=0,\ X_2=24.$$

То есть, последовательные целые числа 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 и -3,-2,-1,0,1,2,3 обладают свойством: сумма квадратов первых четырех из них равна сумме квадратов последних трех. Действительно:

$21^2+22^2+23^2+24^2=2030$; $25^2+26^2+27^2=2030$.

Или $(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2=14$, $1^2+2^2+3^2=14$.

Таким же образом, с помощью квадратного уравнения, я получил две последовательности из 9 чисел.

Это 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 и -4, -3, -2, -1, 0. 1, 2, 3, 4

где $36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 7230$ и $41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 = 7230$

$(-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2$ 30 и $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$.

И из 11 чисел: 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, здесь суммы квадратов первых 6 чисел и последних 5 равны 19855.

Это исследование можно продолжать и для большего нечетного количества последовательных целых чисел, где сумма квадратов первых k чисел, равна сумме квадратов, следующих k-1 чисел, что даёт возможность найти достаточно много вариантов заданий, аналогичных заданию, представленному на картине.

Докажем это. Пусть задана последовательность целых чисел

$(X- n)$, $\dots(X-2)$, $(X-1)$, X, $(X+1)$, $(X+2)$, ..., $(X+ n)$.

Тогда $(X- n)^2+ \dots+(X-2)^2+ (X-1)^2+ X^2 = (X+1)^2+ (X+2)^2+ \dots+(X+ n)^2$

Так как последовательность, состоящая из целых чисел, симметрична относительно числа X, то после упрощения уравнение примет вид $X (X- t)=0$, корнями которого будут целые числа 0 и t.

4. Исследование закономерности чисел для суммы кубов

Меня заинтересовал вопрос, а найдутся ли числа, обладающие таким же свойством для кубов, то есть сумма кубов первых трех из них равна сумме кубов двух последних.

Зададим пять последовательных чисел:

1 число - $(X – 2)$

2 число - $(X – 1)$

3 число - X

4 число - $(X + 1)$

5 число - $(X +2)$

Попробуем выяснить, возможно ли выполнение равенства

$$(X-2)^3+ (X- 1)^3 + X^3 = (X +1)^3 + (X +2)^3.$$

Упростив полученное уравнение, получим:

$$X^3 – 6X^2 +12X -8 +X^3 -3X^2 + 3X -1 +X^3 = X^3 + 3X^2 +3X + 1 +X^3 + 6X^2 + 12X + 8,$$

$$X^3 – 18X^2 – 18 =0 \text{ или}$$

$$X^3 = 18X^2 + 18.$$

Мне не удалось решить получившееся уравнение, однако, в ходе исследования этого уравнения я заметил, что при $X = 18$, значение функции $У= X^3$ меньше соответствующего значения функции $У = 18X^2 – 18$. Действительно, $18^3 = 5832$, а $18x18^2 + 18 = 5850$, то есть $5832 < 5850$. Но при $X = 19$, наоборот, значение функции $У = X^3$ больше соответствующего значения функции $У = 18X^2 – 18$.

Действительно, $19^3 = 6859$, а $18x19^2 + 18 = 6516$, то есть $6859 > 6516$.

Из этого можно сделать вывод, что уравнение $X^3 = 18X^2 + 18$, а, следовательно, и уравнение $X^3–18X^2–18 =0$ имеет своим решением дробное число $18<X<19$, целочисленных же корней оно не имеет. То есть не существует ряда из пяти последовательных натуральных чисел, сумма кубов первых трех из которых равна сумме кубов двух последних.

В ходе исследования данной задачи я заметил, что $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. В самом деле, $27 + 64 + 125 = 216$ и $6^3 = 216$, из чего следует, что есть четыре последовательных числа, из которых сумма кубов первых трех равна кубу последнего.

Встал вопрос: единственный ли это ряд, обладающий данным свойством? Чтобы ответить на этот вопрос, я опять решил прибегнуть к уравнению.

Зададим четыре последовательных числа (уберем последнее из них):

1 число - $(X – 2)$

2 число - $(X – 1)$

3 число - X

4 число - $(X + 1)$

Так как сумма кубов первых трех из них должна равняться кубу четвертого, то составим и решим уравнение: $(X – 2)^3 + (X – 1)^3 + X^3 = (X + 1)^3$.

Применяя формулы сокращенного умножения, раскроем скобки

$X^3 – 6X^2 + 12X – 8 + X^3 – 3X^2 + 3X -1 + X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$,

далее упростим: $2X^3 – 12X^2 + 12X – 10 =0$,

$$X^3 – 6X^2 + 6X – 5 = 0,$$

и разложим на множители способом группировки:

$$X^3 – 5X^2 – X^2 + 5X + X – 5 = 0,$$

$$X^2(X – 5) – X (X – 5) + 1(X – 5) =0,$$

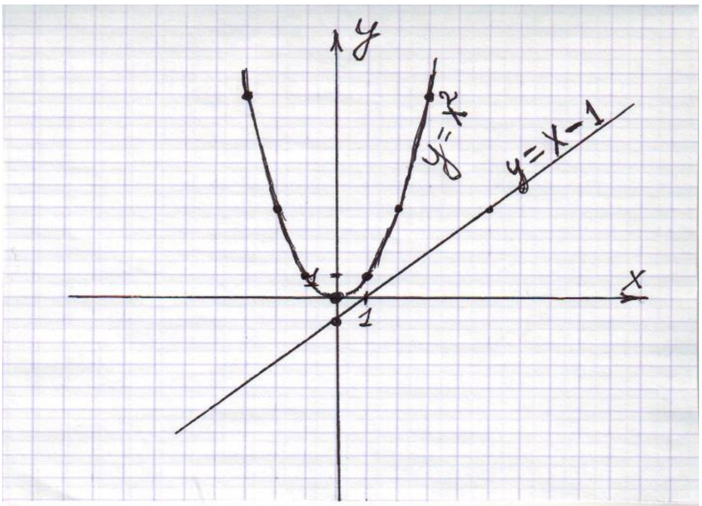
$$(X – 5) (X^2 – X + 1) = 0,$$

$$X – 5 = 0 \text{ или } X^2 – X + 1 = 0,$$

$$X = 5.$$

Для решения уравнения $X^2 – X + 1 = 0$ или уравнения $X^2 = X - 1$ воспользуемся графическим способом.

Зададим функции: $У=X^2$; $У=X–1$ и построим их графики.



По рисунку видим, что точек пересечения графиков нет, откуда делаем вывод, что уравнение $X^2 – X + 1 = 0$ корней не имеет.

Итак, существует единственное решение данной задачи:

1 число $5 – 2 =3$;

2 число $5 – 1 = 4$,

3 число 5;

4 число $5 + 1 = 6$.

То есть существует единственный ряд из четырех последовательных чисел, сумма кубов первых трех которых равна кубу последнего: 3, 4, 5, 6.

5. Выражения для устного счета, полученные в ходе исследования

В ходе исследования я нашел особенности последовательностей целых чисел и предлагаю несколько числовых выражений для устного счета, аналогичных тем, которые мы видим на картине художника Н.П. Богданова-Бельского «Устный счет» или «Трудная задача».

Примеры:

1). $\dfrac{3^3+4^3+5^3+6^3}{216}$;

2). $\dfrac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5}$;

3). $\dfrac{21^2+22^2+23^2+24^2+25^2+26^2+27^2}{2030}$;

4). $\dfrac{36^2+37^2+38^2+39^2+40^2+41^2+42^2+43^2+44^2}{7230}$

5). $\dfrac{55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2+61^2+62^2+63^2+64^2+65^2}{19855}$

Заключение

Трудность решения в какой-то мере
входит в само понятие задачи:
там, где нет трудности, нет и задачи
Д. Пойа[6]

Известно, что одна и та же математическая закономерность может послужить основой для довольно большого числа внешне различных задач и может иногда давать неожиданные и оригинальные результаты. Вычислители – виртуозы во многих случаях облегчают себе работу, прибегая к несложным математическим преобразованиям. Замечать интересные особенности ряда чисел или других математических величин для меня увлекательно и интересно. Кроме того, занимаясь такой работой, мы приучаем себя анализировать данные

[6] https://www.sites.google.com/site/filosofiamatematiki/interesnye-fakty-o-matematike-1/vyskazyvania-velikih-ludej-o-matematike

задачи и искать нешаблонные пути их решения, так как решение их стандартным путем зачастую громоздко и затруднительно.

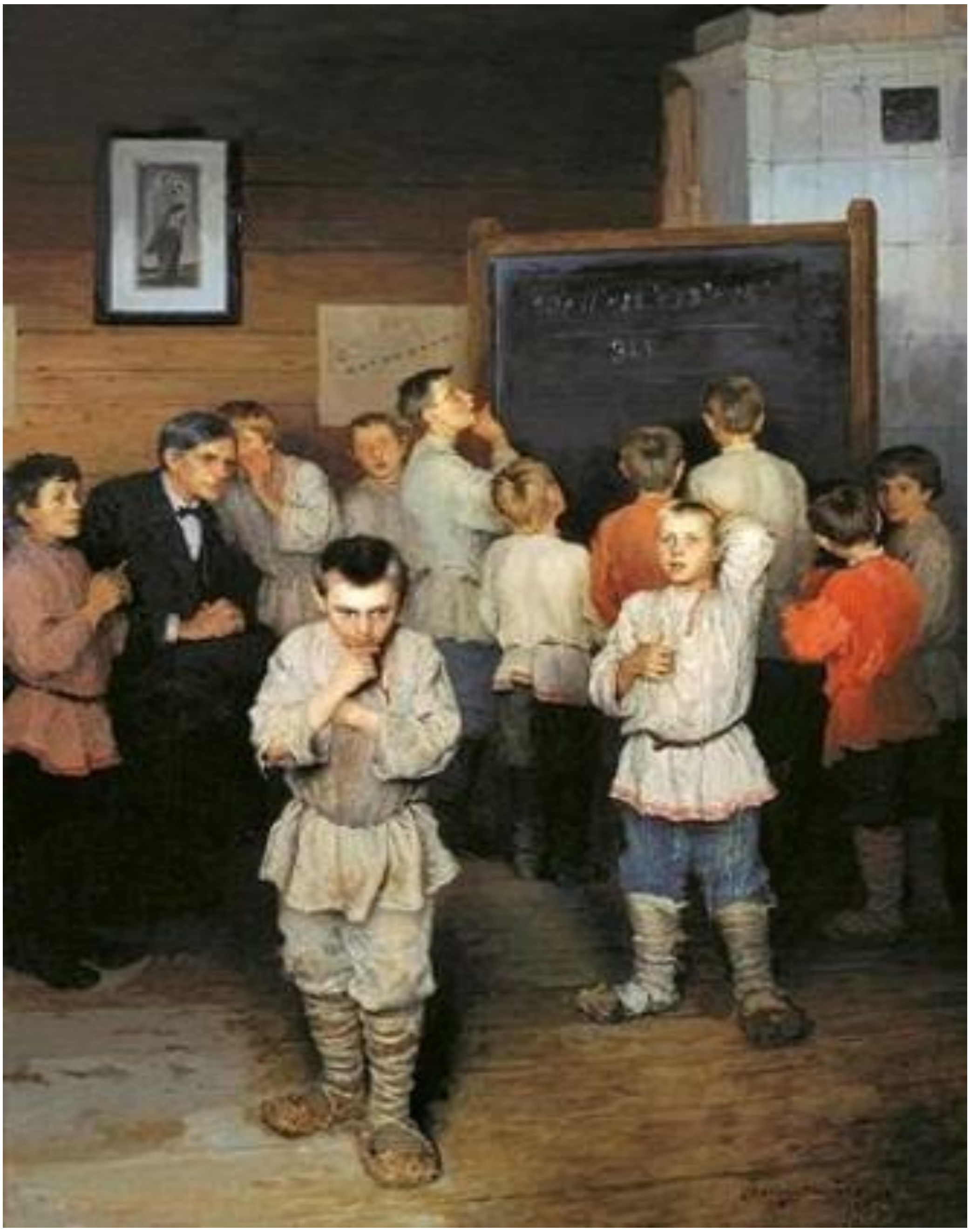
Такая работа полезна для успешного обучения математике, подготовке к сдаче экзаменов. Кроме того, без прочного овладения основами вычислительной культуры невозможно усвоение других дисциплин.

В ходе исследований я нашел особенности и закономерности последовательности целых чисел, которые объясняют устное решение выражения, изображенного на картине Н.П. Богданова-Бельского «Устный счет», а также нашел аналогичные последовательности, обладающие подобными свойствами. Считаю, что подборка заданий, полученных в результате работы, будет полезна на уроках математики для всех учащихся, начиная с 6 класса.

Список литературы:

1. Глейзер Г.И. «История математик в школе»: М. «Просвещение», 1981г.
2. Минковский В.Л. «За страницами учебника математики»: М. «Просвещение», 1986 г.
3. Нагибин Ф.Ф. «Математическая шкатулка»: М. «Просвещение», 1988 г.
4. https://www.sites.google.com/site/filosofiamatematiki/interesnye-fakty-o-matematike-1/vyskazyvania-velikih-ludej-o-matematike
5. https://4brain.ru/blog/картина-устный-счет/
6. https://rusmuseumvrm.ru/data/events/2016/03/istoriya_odnogo_shedevra_ustniy_schet_v_narodnoy_shkole_sarachinskogo/
7. http://gorenka.org/index.php/bogdanov-belskij-n-p
8. https://ru.wikipedia.org/wiki/Устный_счёт._В_народной_школе_С._А._Рачинского

Приложение



Н.П. Богданов-Бельский, «Устный счет. В народной школе С. А. Рачинского»