II Дистанционная Международная конференция учащихся
«Научно- творческий форум»
г. Москва, 2020 г.

ЧИСЛОВЫЕ ИГРЫ РАЗУМА

$$\begin{cases} X^n + P = K^n \\ X^n - P = C^n \end{cases}$$

Автор: **Поплевин Никита Дмитриевич,**

Россия, Мурманская область, ЗАТО г. Североморск, Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №1 имени Героя Советского Союза Ивана Сивко, 9 класс

Научный руководитель: Нирян Людмила Владимировна, учитель математики

ЧИСЛОВЫЕ ИГРЫ РАЗУМА

Автор: **Поплевин Никита Дмитриевич,** Россия, Мурманская область, ЗАТО г. Североморск, Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №1 имени Героя Советского Союза Ивана Сивко, 9 класс

Аннотация

В работе рассматривается одно необычное задание, которое названо именем математика, первым предложившего его решение для частного случая, а именно - «Задача Фибоначчи». Суть её состоит в том, что **необходимо найти квадрат такого числа X, чтобы при прибавлении к нему числа P и вычитании из него числа P получились полные квадраты.** Показалось интересным попробовать расширить знания по этому вопросу.

Цель работы: поиск метода и его применение для решения задачи Фибоначчи и для остальных случаев, а также рассмотрение вопроса об её обобщении на произвольные натуральные степени рассматриваемых чисел.

Методы и приёмы исследования:

1. Сопоставление
2. Анализ
3. Математическое моделирование

В ходе исследования было установлено, что такой метод не только действительно существует, а также показано его применение для решения задачи как в конкретных случаях (для n=2 и n=3), так и в обобщённом виде.

Введение

История моего исследования началась с того самого момента, когда в одной из популярных и занимательных книг по математике с зазывающим названием «Ну-ка, реши!» я обнаружил довольно интересное задание, имеющее с исторической точки зрения весомое и многообещающее название: «Задача Фибоначчи» (XIII век). Суть его

заключалась в поиске некоторого числа, обладающего удивительным свойством, речь о котором и пойдёт в этой работе. И первое, что я посчитал необходимым сделать, это было мое знакомство с той эпохой, с теми людьми, с теми

научными веяниями, которыми и было придумано это действительно необычное задание. А эпоха эта была тогда, когда философия и многопредметная наука были неотделимы, а учёные многих направлений науки назывались философами. Это была эпоха правления Фридриха II, императора Священной Римской империи, приветствовавшего все новое, научное, светское. [2]. И хотя его необдуманные действия привели к усилению раздробленности империи, он не был тугодумом и всегда тяготел к ученым-философам, общению с ними. Его двор был центром поэзии и науки. Так, Пьетро делла Винья, более известный как поэт, юрист и гений эпистолярного жанра, упоминал в письмах интересовавшие его научные вопросы, например: о форме земного шара, о квадратуре круга, о преобразовании треугольников в четырёхугольники. В 1224 году император основал Неаполитанский университет, вместе со своими философами вел переписку с учёными Италии, Испании, Африки. Выдающийся математик Леонардо из Пизы, Фибоначчи был хорошо известен Фридриху и философам его двора. Известно, что именно Фридриху в значительной мере посвящены сохранившиеся работы Леонардо. Придворный философ Иоанн Палермский всегда сопровождал Леонардо к императору на научные турниры, когда тот посещал Пизу, и часто предлагал вопросы, касающиеся квадратичных и кубических уравнений, о которых потом писал Фибоначчи в своих трудах. Одним из них и стало то самое задание, которое называют именем математика, первым предложившего его решение для частного случая.

Итак, суть этого задания состоит в том, что **необходимо найти квадрат такого числа X, чтобы при прибавлении к нему числа P и вычитании из него числа P получились полные квадраты.** Привожу полный текст условия и решения этой задачи, предложенной в первоисточнике. ([1], стр.65, стр.77).

Задача Фибоначчи

Условие задачи можно выразить системой

$$\begin{cases} X^2 + P = K^2, & (1) \\ X^2 - P = C^2, & (2) \end{cases}$$

т.е. ***надо найти квадрат такого числа X, чтобы при прибавлении к нему P и вычитании от него числа P получились полные квадраты.*** *Если, например, P = 1984, то*

$$X = \frac{2\,566561}{25\,830}, \qquad K = \frac{2\,812639}{25\,830}, \qquad C = \frac{2\,294\,239}{25\,830}.$$

При помощи калькулятора проверьте правильность этих равенств. ***Фибоначчи решил задачу для P = 5****, а саму задачу поставил император Фридрих II. Попробуйте восстановить решение Фибоначчи.*

Решение: *Вычитая из (1) равенства (2), получим:* $2P = K^2 - C^2$, $2P = (K - C)(K + C)$.

По условию P = 5, $2 \cdot 5 = (K - C)(K + C)$, $\begin{cases} K - C = 2, \\ K + C = 5; \end{cases}$ $2K = 7$, $K = 3.5$, $C = 1{,}5$

Подставим в (1) и (2), получим: $X^2 + 5 = 3.5^2$ (3), $X^2 - 5 = 1.5^2$ (4).

Откуда видно, что из (3) и (4) следует, что $X^2 = 7.25$ *. Ясно, что в этом случае X – иррациональное число.*

А нет ли рациональных чисел X, K и C, удовлетворяющих условию задачи Фибоначчи при p=5?

Именно последняя фраза о рациональности рассматриваемых чисел для случая ***p=5*** показалась мне очень перспективной в плане поиска ответа на поставленный вопрос. С этого и началось моё исследование. Тем более что нам с моим научным руководителем не удалось найти ответ на этот вопрос ни в одном доступном для нас источнике.

Ход исследования

Очевидно, что простым перебором такую задачу не решить, поскольку вариантов разложения на множители произведения *(K - C)(K + C)* при *P=5* существует бесконечно много, и найти те, что удовлетворяют условию, предложенному в конечной фразе решения в первоисточнике, в данном случае практически невозможно. Помог случай. Изучая теорему Пифагора, и всё, что с ней связано, я обратил внимание, что кроме примитивных троек чисел, удовлетворяющих условию теоремы, существует еще бесконечное множество их «собратьев», то есть троек, полученных из примитивных (первичных) умножением на произвольное натуральное число, большее единицы, что обеспечивает также бесконечное число таких троек чисел. Однако не это сыграло роль в моих исследованиях, а то, каким методом были получены эти примитивные тройки чисел. Ниже представляю этот метод.

Шаг №	Имеем : $a^2 + b^2 = c^2$
1	Делим обе части на c^2: $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$
2	Обозначаем: $\frac{a}{c}$ = m, $\frac{b}{c}$ = n, получаем $m^2 + n^2 = 1$
3	Преобразуем: $m^2 = 1 - n^2$ = (1 - n)(1 + n)
4	Записываем в виде пропорции: $\frac{m}{1+n} = \frac{1-n}{m} = t$
5	Имеем два равенства: $\frac{m}{1+n} = t$ и $\frac{1-n}{m} = t$
6	Откуда: m = (1 + n)t и n = 1 - mt
7	**Подставим второе равенство в первое, получим:** **m = (2 – mt)t, откуда получим** $m = \frac{2t}{1+t^2}$
8	**Выражаем** $n = 1 - mt = 1 - \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
9	**Заменяем** $t = \frac{u}{v}$ (несократимая дробь для получения примитивных троек), получаем: $m = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2uv}{u^2+v^2} = \frac{a}{c}$ и $n = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{v^2-u^2}{v^2+u^2} = \frac{b}{c}$
10	**Делаем вывод:** $c = (u^2+v^2)r$, $a = 2uvr$, $b = (v^2 - u^2)r$, **где r –** коэффициент пропорциональности

Понятно, что я с особой тщательностью изучил этот метод, и, как оказалось, не зря. Дело в том, что в условии задачи Фибоначчи речь также шла о квадратах чисел, и мне показалось, что знакомство с методом получения пифагоровых троек мне может как-то помочь.

И вот, что у меня в итоге получилось:

Запишем условие задачи еще раз: $\begin{cases} X^2 + P = K^2, & (3) \\ X^2 - P = C^2, & (4) \end{cases}$

Далее сложим (почленно) оба уравнения системы и получим $K^2 + C^2 = 2X^2$

Теперь разделим обе части равенства на $2X^2$ и получим: $\frac{K^2}{2X^2} + \frac{C^2}{2X^2} = 1$ (5)

Обозначим $m = \frac{K}{X\sqrt{2}}$, $n = \frac{C}{X\sqrt{2}}$, тогда равенство (5) запишется: $m^2 + n^2 = 1$, откуда $m^2 = 1 - n^2$

,

$m^2 = (1 - n)(1 + n)$. Запишем это равенство в виде пропорции: $\frac{m}{(1+n)} = \frac{(1-n)}{m} = t$

И снова выразим наши m и n: $m = (1 + n)t$, $n = 1 - mt$

Подставим **n** в **m:** $m = (1 + 1 - mt)t = (2 - mt)t = 2t - mt^2$ и теперь у нас **m** выразилось только через **t:** $m + mt^2 = 2t, \quad m\,(1 + t^2) = 2t, \quad m = \frac{2t}{1+t^2}$ (6)

Помним, что $n = 1 - mt$, поэтому подставим (6) и получим:

$$n = 1 - \frac{2t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2-2t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad (7)$$

Считая $t = \frac{u}{v}$ (несократимая дробь), равенства (6) и (7) запишутся:

$$m = \frac{2u}{v} : \left(1 + \frac{u^2}{v^2}\right) = \frac{2uv}{u^2+v^2} \qquad (8)$$

$$n = \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) : \left(1 + \frac{u^2}{v^2}\right) = \frac{v^2-u^2}{u^2+v^2} \qquad (9)$$

Помня, что $m = \frac{K}{X\sqrt{2}}$, $n = \frac{C}{X\sqrt{2}}$, получим: $\frac{K}{X\sqrt{2}} = \frac{2uv}{u^2+v^2}$ и $\frac{C}{X\sqrt{2}} = \frac{v^2-u^2}{u^2+v^2}$

Поэтому $K = 2uv * r$

$$C = (v^2 - u^2) * r \qquad (10)$$

$X\sqrt{2} = (v^2 + u^2) * r$, $\quad X = (v^2 + u^2) * \frac{r}{\sqrt{2}}$

Осталось теперь задать P, помня, что из равенства, например, (1):

$$P = K^2 - X^2 = 4u^2v^2r^2 - \frac{(v^2+u^2)^2}{2} * r^2 = \left(\frac{8u^2v^2 - v^4 - u^4 - 2u^2v^2}{2}\right) * r^2 = \left(\frac{6u^2v^2 - v^4 - u^4}{2}\right) * r^2$$

, где u и v – взаимно простые, а r - натуральное число кратности.

Замечание: в дальнейшем, число кратности, как и числа u и v, станут рассматриваться в произвольном виде для полноты получаемых решений.

Полученный результат слегка ошеломил меня, так как неожиданно для меня самого все числа в условии задачи действительно смогли выразиться через три параметра, которые можно задавать самостоятельно и получать бесконечно много решений этой старинной задачи! Я тут же решил проверить это на конкретных случаях. Покажу результаты проверки для одного из них, например, для **u = 1, v = 2, r = 1.** Получаем из формул (10): $C = 3$, $P = 3{,}5$, $X = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $K = 4$.

Осталось проверить выполнимость равенств (1) и (2): $\frac{25}{2} + \frac{7}{2} = 16$, $16 = 16$.

$\frac{25}{2} - \frac{7}{2} = 9$, $\quad 9 = 9$.

Далее я решил написать рабочую программу для генерации указанных чисел через задаваемые **u, v** и ***r***, что я и сделал. Для наглядности представляю некоторые результаты: **(например, для *r* = *1*)**

u	v	r	*C*	*K*	*X*	*P*
1	2	1	3	4	$2{,}5\sqrt{2}$	3,5
2	3	1	5	12	$6{,}5\sqrt{2}$	59,5
1	5	1	24	10	$13\sqrt{2}$	- 238
3	1	1	-8	6	$5\sqrt{2}$	-14

4	2	1	-12	16	$10\sqrt{2}$	56
1	1	1	0	2	$\sqrt{2}$	2

Однако при такой параметризации я **пока не смог ответить** на самый главный вопрос об иррациональности рассматриваемых чисел, который волновал меня с самого начала. Формулы (10) ясно показывают, что иррациональность будет оставаться в этом наборе формул, так как, даже если мы возьмём ***r***, содержащий $\sqrt{2}$, он может исчезнуть у ***X***, но тут же появится у ***K*** и ***C***. Понятно, что это будет распространяться и на случай с **P = 5. Но как тогда получился рациональный набор для числа 1984?**

Поэтому мне пришлось ещё «покопаться» в параметризации уравнений и систем. И удалось обнаружить следующее: оказывается, можно и по-другому вводить параметр для переменных. Для этого оставляя теперь интересуемое нас число в наличии. Поэтому мне не оставалось ничего другого, как совершить действие, обратное предыдущей параметризации, а именно, вычитание (почленное) уравнений исходной системы. И вот, что у меня получилось:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X^2+p=K^2} \\ \boldsymbol{X^2-p=C^2} \end{cases}, \quad 2p=K^2-C^2,\ 2P=(K-C)\cdot(K+C),\ \frac{2P}{K+C}=\frac{K-C}{1}=t.$$

$$\begin{cases} 2p=(K+C)t \\ t=K-C \end{cases}, \quad \begin{cases} 2p=Kt+Ct \\ t=K-C \end{cases}, \quad \begin{cases} 2p=Kt+Ct \\ t^2=Kt-Ct \end{cases}, \quad 2p+t^2=2Kt, \quad K=\frac{2p+t^2}{2t}.$$

$$t=K-C,\ \mathrm{C=K-t}, \quad C=\frac{2p+t^2}{2t}-t=\frac{2p+t^2-2t^2}{2t}=\frac{2p-t^2}{2t}.$$

При сложении уравнений получаем: $\boldsymbol{2X^2=C^2+K^2}$,

$$X^2=\frac{1}{2}(K^2+C^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{4p^2-4pt^2+t^4}{4t^2}+\frac{4p^2+4pt^2+t^4}{4t^2}\right)=\frac{8p^2+2t^4}{8t^2}=\frac{4p^2+t^4}{4t^2}$$

И для p = 5 имеем: $X=\pm\sqrt{\dfrac{100+t^4}{4t^2}}=\pm\dfrac{\sqrt{100+t^4}}{2t}.$

Признаюсь, пришлось потратить много времени на осмысление этой параметризации. По понятным причинам, была проведена проверка для предложенного набора рациональных X, K и C для числа 1984. И она подтвердила существование такого набора для этого числа. Причем, мне удалось найти те два значения для t, которые и «выдавали» этот самый рациональный набор ($t_1=\frac{8897}{45}$, $t_2=\frac{5760}{287}$). А, вот, для числа 5 вопрос оставался открытым. Даже обнаруженная мной еще одна тройка параметризированных чисел для получения пифагоровых троек $\boldsymbol{(t, \frac{t^2-1}{2}, \frac{t^2+1}{2})}$ только уводила меня в сторону от ответа. А он, как оказалось, лежал на поверхности! Видимо, от отчаяния, я стал мысленно подставлять вместо t уже не целые числа, а дроби, видя, какие значения получились для числа 1984. И, неожиданно для меня, число $\frac{3}{2}$ «сработало»!!! $\boldsymbol{X}$ оказался рациональным, как, впрочем, и все остальные участники исходной системы.

$$\boldsymbol{X} = \pm\frac{\sqrt{100+t^4}}{2t} = \pm\frac{\sqrt{100+(\frac{3}{2})^4}}{3} = \pm\frac{\sqrt{100+\frac{81}{16}}}{3} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1681}{16}}}{3} = \pm\frac{\mathbf{41}}{\mathbf{12}}$$

При этом $\boldsymbol{K} = \frac{\mathbf{10}+\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathbf{10}+\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{12}}$. $\boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathbf{10}-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{12}}$.

Вот и все! Такой набор нашелся! Хотя тут же возникает резонный вопрос: а есть ли второе число? Ведь по аналогии с числом 1984 их должно быть два! Опять начались долгие поиски, пока в голову не пришла очень простая идея: зная теперь значение для $\boldsymbol{X}$, решить уравнение $\frac{\sqrt{100+t^4}}{2t} = \frac{41}{12}$, $\frac{100+t^4}{t^2} = \frac{1681}{36}$, $36t^4 - 1681t^2 + 3600 = 0$. Откуда $\left[\begin{array}{l} t^2 = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}} \\ t^2 = \frac{\mathbf{400}}{\mathbf{9}} \end{array}\right.$

И наше первое значение получилось, и второе значение - тоже.

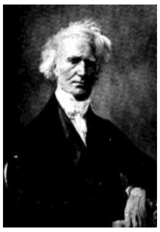
Замечание 1: оговорюсь, что здесь я не ставил себе целью минимизировать знак для $\boldsymbol{t}$ в сторону только его положительности. Важно было найти хотя бы одно такое число.

Замечание 2: при попытке «разобрать по косточкам» ход подбора тройки чисел $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{K}$ для числа Р =1984, я понял, что автор первоисточника мог найти такой набор только обратным ходом, то есть, подбирал три такие дроби, чтобы они в результате и дали целое число 1984. Поскольку подобрать тем методом перебора, каким получилось у меня, такие дроби крайне сложно. Вот как выглядел бы $\boldsymbol{X}$ для тех значений t, что должны были у него получиться (или подобраться как у меня):

например, для $\boldsymbol{t} = \frac{8897}{45}$, $\boldsymbol{X} = \frac{1}{2\boldsymbol{t}}\sqrt{2^{14}\cdot 31^2 + \frac{(31\cdot 287)^4}{45^4}} = \frac{31}{2\boldsymbol{t}}\sqrt{2^{14} + 31^2\frac{\cdot 287^4}{45^4}}$

Аналогично громоздко и без каких либо намёков на логику запишется $\boldsymbol{X}$ и для второго значения $\boldsymbol{t} = \frac{5760}{287}$.

Замечание 3: сведений по поводу того, почему Фибоначчи выбрал именно число 5 для частного решения системы, обнаружено не было. Поэтому мне остаётся лишь предполагать, что это число было взято им из ряда придуманных им чисел – чисел Фибоначчи (где каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих): 1, 1, **2, 3, 5, 8, 13, 21, 34**, …, задающихся известной формулой Бине (французского математика, открывшего и доказавшего ее лишь через 500 лет после создания ряда чисел Фибоначчи): $y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, где n (в данном случае) – номер числа в ряду.



Итак, на все поставленные перед собой вопросы я смог ответить, но моя любознательность взяла верх надо мной, и я решил продолжить свои поиски, теперь уже для кубов рассматриваемых чисел и числа Р. Ведь знаменитый математик Фибоначчи в своих трудах рассматривал и такие степени различных уравнений. И вот, что у меня получилось после применения тех же методов, которые я применил для квадратов рассматриваемых чисел. Для начала - первый вид параметризации:

По аналогии с условием, представленным в первоисточнике, я составил следующую систему:

$$\begin{cases} X^3 + P = K^3 \\ X^3 - P = C^3 \end{cases}; \qquad 2X^3 = K^3 + C^3 \qquad \frac{K^3}{2X^3} + \frac{C^3}{2X^3} = 1$$

Пусть $n = \frac{c}{x\sqrt[3]{2}}$, $m = \frac{k}{x\sqrt[3]{2}}$. $m^3 + n^3 = 1$, $m^3 = 1 - n^3$

$$m^3 = (1-n)\cdot(1+n+n^2)$$

Запишем это равенство в виде пропорции: $\frac{m}{1-n} = \frac{1+n+n^2}{m^2} = t$

Тогда: $\begin{cases} m = (1-n)t \\ m^2 t = 1+n+n^2 \end{cases}$, $\frac{m}{t} = 1 - n$, $n = 1 - \frac{m}{t} = \frac{t-m}{t}$.

$m^2 t = 1 + \frac{t-m}{t} + \left(\frac{t-m}{t}\right)^2$, $m^2 t = 1 + \frac{t-m}{t} + \frac{t^2-2mt+m^2}{t^2}$,

$m^2t^3 = t^2 + t^2 - mt + t^2 - 2mt + m^2$, $m^2t^3 = 3t^2 - 3mt + m^2$, $m^2t^3 - m^2 + 3mt - 3t^2 = 0$

$\boldsymbol{m^2\cdot(t^3-1) + 3t\cdot m - 3t^2 = 0}$

$D = 9t^2 + 12t^2\cdot(t^3-1) = 9t^2 + 12t^5 - 12t^2 = 12t^5 - 3t^2 = t^2\cdot(12t^3-3)$

$$m_{1,2} = \frac{-3t \pm t\cdot\sqrt{12t^3-3}}{2(t^3-1)}$$

$$n_{1,2} = 1 - \frac{m}{t} = 1 - \frac{-3 \pm \sqrt{12t^3-3}}{2(t^3-1)} = \frac{2(t^3-1) + 3 \mp \sqrt{12t^3-3}}{2(t^3-1)} = \frac{2t^3 + 1 \mp \sqrt{12t^3-3}}{2(t^3-1)}$$

Пусть теперь снова $t = \frac{u}{v}$, тогда:

$$m_{1,2} = \frac{-\frac{3u}{v} \pm \frac{u}{v}\sqrt{12t^3-3}}{2\left(\frac{u^3}{v^3}-1\right)} = \frac{-3uv^2 \pm uv^2\cdot\sqrt{12\frac{u^3}{v^3}-3}}{2(u^3-v^3)} = \frac{-3uv^2 \pm uv^2\cdot\frac{1}{v}\cdot\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}}{2(u^3-v^3)} = \frac{-3uv^2 \pm uv\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}}{2(u^3-v^3)}$$

$$m_{1,2} = \frac{k}{x\sqrt[3]{2}} = \frac{-3uv^2 \pm uv\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}}{2(u^3-v^3)}$$

$$n_{1,2} = \frac{2\cdot\frac{u^3}{v^3} + 1 \mp \frac{1}{v}\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}}{2\cdot\left(\frac{u^3}{v^3}-1\right)} = \frac{2u^3 + v^3 \mp v^2\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}}{2(u^3-v^3)}$$

$$n_{1,2} = \frac{c}{x\sqrt[3]{2}} = \frac{2u^3 + v^3 \mp v^2\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}}{2(u^3-v^3)}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{K = \left(-3uv^2 \pm u\cdot v\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}\right)\cdot r} \\ \boldsymbol{C = (2u^3 + v^3 \mp v^2\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}})\cdot r} \\ X = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}\cdot(u^3-v^3)\cdot r = \boldsymbol{\sqrt[3]{4}\cdot(u^3-v^3)\cdot r,} \end{cases}$$

где v, u – взаимно простые, r - натуральное число кратности

Понятно, что логичным было проверить полученные формулы, пусть даже на самых простых вариантах. И вот, что у меня получилось:

Например, для $u = 2,\ v = 1,\ r = 1$

I случай

$$\begin{cases} K_1 = \left(-3uv^2 + uv\cdot\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}\right) r, \\ C_1 = \left(2u^3 + v^3 - v^2\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}\right)\cdot r, \\ X_1 = \sqrt[3]{4}\cdot(u^3-v^3)\, r\,. \end{cases}$$

$K_1 = -3\cdot 2 + 2\cdot\sqrt{12\cdot 8 - 3} = -6 + 2\sqrt{93}$

$C_1 = 2\cdot 8 + 1 - \sqrt{93} = 17 - \sqrt{93}$

$X_1 = \sqrt[3]{4}(8-1) = 7\sqrt[3]{4}$

$P_1 = {K_1}^3 - {X_1}^3 = \left(2\sqrt{93} - 6\right)^3 - \left(7\sqrt[3]{4}\right)^3 =$

$= 8\cdot 93\sqrt{93} - 3\cdot 4\cdot 93\cdot 6 + 3\cdot 2\sqrt{93}\cdot 36 - 216 - 4\cdot 7^3 = 960\sqrt{93} - 8284$

С другой стороны:

$P_1 = {X_1}^3 - {C_1}^3 = 7^3\cdot 4 - \left(17 - \sqrt{93}\right)^3 =$

$= 1372 - \left(17^3 - 3\cdot 289\cdot\sqrt{93} + 3\cdot 17\cdot 93 - 93\sqrt{93}\right) = 960\sqrt{93} - 8284$

II случай

$$\begin{cases} K_2 = \left(-3uv^2 - uv\cdot\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}\right) r, \\ C_2 = \left(2u^3 + v^3 + v^2\sqrt{\frac{12u^3-3v^3}{v}}\right) r, \\ X_2 = \sqrt[3]{4}\cdot(u^3-v^3)\, r\,. \end{cases}$$

$K_2 = -6 - 2\sqrt{93}, \quad C_2 = 17 + \sqrt{93}, \quad X_2 = 7\sqrt[3]{4}$

$P_2 = {K_2}^3 - {X_2}^3 = \left(-6 - 2\sqrt{93}\right)^3 - 1372 =$

$= -\left(216 + 3\cdot 36\cdot 2\sqrt{93} + 3\cdot 6\cdot 4\cdot 93 + 8\cdot 93\sqrt{93}\right) - 1372 = -8284 - 960\sqrt{93}$

С другой стороны:

$P_2 = {X_2}^3 - {C_2}^3 = 1372 - \left(17 + \sqrt{93}\right)^3 =$

$$= 1372 - \left(4913 + 3 \cdot 289\sqrt{93} + 3 \cdot 17 \cdot 93 + 93\sqrt{93}\right) = -8284 - 960\sqrt{93}$$

Далее представляю **второй вид параметризации для кубов чисел**, входящих в систему, схожую с исходной:

$$\begin{cases} X^3 + p = K^3 \\ X^3 - p = C^3 \end{cases}$$

Вычитая теперь из первого уравнения второе (почленно), получаем:

$$2p = K^3 - C^3 = (K - C) \cdot (K^2 + KC + C^2)$$

$$\frac{2p}{K-C} = \frac{K^2+KC+C^2}{1} = t, \quad \begin{cases} 2p = (K - C)t \\ t = K^2 + KC + C^2 \end{cases}$$

Далее преобразуем систему, возведя первое ее уравнение в квадрат, а второе, умножив на t^2:

$$\begin{cases} 4p^2 = Kt^2 - 2KCt^2 + C^2t^2 \\ t^3 = K^2t^2 + KCt^2 + C^2t^2 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим:

$$t^3 - 4P^2 = 3KCt^2$$

Подставим $K = \frac{2p+Ct}{t}$, выраженое из уравнения $2p = Kt - Ct$, получим:

$$t^3 - 4p^2 = 3Ct(2p + Ct)$$

$$3t^2C^2 + 6ptC - (t^3 - 4p^2) = 0$$

$$D = 36p^2t^2 + 12t^2 \cdot (t^3 - 4p^2) = 12t^2(t^3 - p^2)$$

$$C_{1,2} = \frac{-6pt \pm 2t\sqrt{3t^3-3p^2}}{6t^2} = \frac{-3p \pm \sqrt{3t^3-3p^2}}{3t}$$

$$K = \frac{2p}{t} + C, \quad K_{1,2} = \frac{3p \pm \sqrt{3t^3-3p^2}}{3t}$$

Из сложения $\begin{cases} X^3 + p = K^3 \\ X^3 - p = C^3 \end{cases}$ получаем: $2X^3 = K^3 + C^3$

$$2X^3 = \frac{\left(3p \pm \sqrt{3t^3 - 3p^2}\right)^3}{27t^3} + \frac{\left(-3p \pm \sqrt{3t^3 - 3p^2}\right)^3}{27t^3}$$

$$2X^3 = \frac{1}{27t^3} \cdot \left(\left(\pm 2\sqrt{3t^3 - 3p^2}\right) \cdot \left(\left(3p \pm \sqrt{3t^3 - 3p^2}\right)^2 - \left(3p \pm \sqrt{3t^3 - 3p^2}\right) \cdot \left(-3p \pm \sqrt{3t^3 - 3p^2}\right) + \left(-3p \pm \sqrt{3t^3 - 3p^2}\right)^2\right)\right)$$

$$2X^3 = \frac{(8p^2+t^3) \cdot \pm 2\sqrt{3t^3-3p^2}}{9t^3}, \quad X^3 = \frac{(8p^2+t^3) \cdot (\pm\sqrt{3t^3-3p^2})}{9t^3}$$

$$X = \pm\frac{1}{t}\sqrt[3]{\frac{(8p^2 + t^3) \cdot \sqrt{3t^3 - 3p^2}}{9}}$$

Элементарная проверка подтвердила верность полученных формул.

И теперь, понимая, как «работает» этот метод нахождения наших чисел, я, не задумываясь, решил совершить шаг для поиска решений при **произвольной степени рассматриваемых чисел**, например, на примере первого вида параметризации:

Имеем: $\begin{cases} X^n + P = K^n \\ X^n - P = C^n \end{cases}$

Сложив, как и прежде, оба эти уравнения почленно, получим: $2X^n = K^n + C^n$.

Затем поделим обе части полученного равенства на $2X^n$ и получим: $\frac{K^n}{2X^n} + \frac{C^n}{2X^n} = 1$

Обозначим $M = \frac{K}{X\sqrt[n]{2}}$, $N = \frac{C}{X\sqrt[n]{2}}$, получим: $M^n + N^n = 1$,

Откуда, используя формулу разложения на множители разности степеней

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ [4], имеем:

$$M^n = 1 - N^n = (1-N)(1 + N + N^2 + N^3 + \dots + N^{n-2} + N^{n-1}).$$

Как это делалось и ранее, запишем полученное равенство в виде пропорции:

$$\frac{M}{1-N} = \frac{1 + N + N^2 + N^3 + \dots + N^{n-2} + N^{n-1}}{M^{n-1}} = t$$

Далее имеем систему:

$$\begin{cases} N = \dfrac{t-M}{t} \\ M^{n-1}t = 1 + N + N^2 + N^3 + \dots + N^{n-2} + N^{n-1} \end{cases}$$

Как видно из полученной системы, введённые M и N при любом значении n выразятся через t, которое мы затем также, как и раньше, заменим на отношение $\frac{u}{v}$, а, значит, этот метод также подходит для нахождения рассматриваемых чисел. Понятно, что при повышении степени n вычисления будут все сложнее и сложнее, но примененный метод дает возможность воспользоваться им для осуществления такого поиска. А именно, второе уравнение системы запишется:

$$M^{n-1}t = 1 + \left(\frac{t-M}{t}\right) + \left(\frac{t-M}{t}\right)^2 + \left(\frac{t-M}{t}\right)^3 + \dots + \left(\frac{t-M}{t}\right)^{n-2} + \left(\frac{t-M}{t}\right)^{n-1}$$

Преобразовав (временно, для удобства) выражение $\frac{t-M}{t} = 1 - \frac{M}{t} = 1 -$ **a** каждой скобки, получим:

$$M^{n-1}t = (1-a)^0 + (1-a)^1 + (1-a)^2 + (1-a)^3 + \dots + (1-a)^{n-2} + (1-a)^{n-1}$$

Чтобы преобразовать правую часть этого равенства, необходимо использовать формулу бинома Ньютона для каждого из слагаемых, выраженных скобками. Однако при подсчёте сумм коэффициентов при одинаковых степенях **a** было сложно понять их распределение, поэтому пришлось сначала построить табличку разложений, начиная с нескольких начальных скобок.

n	$(1-a)^n$
0	1
1	1 - a
2	1 - 2a + a^2
3	1 - 3a + 3 a^2 - a^3

4	$1 - 4a + 6a^2 - 4a^3 + a^4$
5	$1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5$
6	$1 - 6a + 15a^2 - 20a^3 + 15a^4 - 6a^5 + a^6$
...	
n-1	$1 - \boldsymbol{C_{n-1}^1} a + \boldsymbol{C_{n-1}^2} a^2 - \boldsymbol{C_{n-1}^3} a^3 + \boldsymbol{C_{n-1}^4} a^4 - \boldsymbol{C_{n-1}^5} a^5 + \boldsymbol{C_{n-1}^6} a^6 - \dots (+,-) \boldsymbol{C_{n-1}^{n-1}} a^{n-1}$

И теперь, когда стало понятно, как формируются коэффициенты, можно записать общую сумму:

$$\sum_{i=n-1}^{i=1} \boldsymbol{C_i^1} \cdot \mathbf{a^1} + \sum_{i=n-1}^{i=2} \boldsymbol{C_i^2} \cdot \mathbf{a^2} - \sum_{i=n-1}^{i=3} \boldsymbol{C_i^3} \cdot \mathbf{a^3} + \sum_{i=n-1}^{i=4} \boldsymbol{C_i^4} \cdot \mathbf{a^4} + \dots (+,-) \sum_{i=n-1}^{i=n-1} \boldsymbol{C_i^{n-1}} \cdot \mathbf{a^{n-1}}$$

$$M^{n-1}t = n - \sum_{i=n-1}^{i=1} \boldsymbol{C_i^1} \cdot \mathbf{a^1} + \sum_{i=n-1}^{i=2} \boldsymbol{C_i^2} \cdot \mathbf{a^2} - \sum_{i=n-1}^{i=3} \boldsymbol{C_i^3} \cdot \mathbf{a^3} + \sum_{i=n-1}^{i=4} \boldsymbol{C_i^4} \cdot \mathbf{a^4} + \dots (+,-) \sum_{i=n-1}^{i=n-1} \boldsymbol{C_i^{n-1}} \cdot \mathbf{a^{n-1}}$$

Возвращаясь к обратной замене, получим:

$$M^{n-1}t = n - \sum_{i=n-1}^{i=1} \boldsymbol{C_i^1} \cdot \left(\frac{M}{t}\right)^{\mathbf{1}} + \sum_{i=n-1}^{i=2} \boldsymbol{C_i^2} \cdot \left(\frac{M}{t}\right)^{\mathbf{2}} - \sum_{i=n-1}^{i=3} \boldsymbol{C_i^3} \cdot \left(\frac{M}{t}\right)^{\mathbf{3}} + \sum_{i=n-1}^{i=4} \boldsymbol{C_i^4} \cdot \left(\frac{M}{t}\right)^{\mathbf{4}} + \dots (+,-) \sum_{i=n-1}^{i=n-1} \boldsymbol{C_i^{n-1}} \cdot \left(\frac{M}{t}\right)^{\mathbf{n-1}}$$

И, если снова принять $t = \frac{u}{v}$, то M, a, значит, и N действительно смогут выразиться через u, v и r, то есть используемый метод может быть применён при любом значении n.

Вывод

В ходе исследования был найден и применён метод нахождения и других решений задачи Фибоначчи (для n=2), а также показано его применение при решении задачи и для случая n=3. Далее показана возможность его применения и в общем случае для произвольного натурального значения степени чисел, рассматриваемых в первоисточнике, то есть историческая задача решена теперь и в общем виде. Кроме того, найден положительный ответ на вопрос о существовании рационального набора чисел для случая P = 5.

Известно, что числа Фибоначчи, как, впрочем, и другие его находки, стали неоценимым вкладом в **математику гармонии**, которая в свою очередь дала толчок развитию других смежных наук (астрономии, биологии, ботаники, экономики). Поэтому полученные мной результаты могут стать моим пока ещё небольшим и скромным вкладом в копилку решений необычных исторических заданий этой части математики и будут ожидать своего применения. Ведь, **главной целью математики гармонии** является поиск тех математических соотношений (пропорций), тех числовых последовательностей, уравнений, систем, а также геометрических фигур, которые выражают **объективную картину мироздания.** А это особенно важно в свете появившихся инновационных тенденций к созданию саморазвивающегося искусственного интеллекта. Кроме того, полученные знания являются исчерпывающими, и могут быть применены для внедрения в

программное обеспечение искусственного интеллекта, создаваемого как раз для решения более сложных технических задач.

В дальнейшем хотелось бы рассмотреть ещё несколько интересных вопросов по этой теме: например, существование решений для натуральных степеней числа Р, а также - найдется ли тройка чисел Фибоначчи, задающая целые значения для Р.

Послесловие

Несколько лет Фибоначчи жил при дворе императора. К этому времени относится его работа «Книга квадратов», написанная в 1225 году. Книга посвящена диофантовым уравнениям второй степени и ставит Фибоначчи в один ряд с такими учёными, развивавшими теорию чисел, как Диофант и Ферма. К сожалению, он не оставил о себе практически никаких автобиографических сведений, единственным исключением является второй абзац «Книги абака», где Фибоначчи излагает причины, побудившие его написать книгу:

«Когда отцу моему была назначена должность таможенного чиновника, (…) он в отрочестве моём призвал меня к себе и предложил несколько дней учиться счётному искусству, сулившему немало удобств и выгод для моего будущего. Наученный благодаря мастерству учителей основам индийского счёта, я приобрёл большую любовь к этому искусству и заодно узнал, что кое-что об этом предмете известно среди египтян, сирийцев, греков, сицилийцев и провансальцев, развивших свои методы. (…) ***Однако по сравнению с методом индийцев все построения этих людей, включая подход алгорисмиков и учение Пифагора, кажутся почти заблуждениями,*** *а потому я решил, изучив как можно внимательнее индийский метод, изложить его в пятнадцати главах настолько понятно, насколько смогу, с добавлениями от собственного разума и с кое-какими полезными примечаниями из геометрии Евклида, вставленными по ходу сочинения. …* ***Если же, паче чаяния, я пропустил что-то более или менее важное, а может быть, необходимое, то молю о прощении, ибо нет среди людей никого, кто был бы безгрешен или обладал способностью всё предвидеть».*** [3].

И великий математик оказался прав: и в том, что сам, не ведая того, подсказал мне путь к поиску и других решений предложенного ему Иоанном Палермским задания про квадраты чисел (имеется в виду его упоминание об учении Пифагора), и в том, что мог допустить, что найдутся и другие решения.

Список литературы:

[1]. Грицаенко Н.П., Ну-ка, реши! М.: Издательство «Просвещение», 1998.-192 с.

[2]. В. Бумагин, ежемесячный журнал «Небесная подкова», статья: «Фридрих II Сицилийский: крестоносец и оккультист»/ [Электронный ресурс], - Режим доступа: http://www.9355.ru/lessons/author/bum/15bu.html

[3]. Vuzlit.ru, статья: «Леонардо Фибоначчи: вклад в науку»/ [Электронный ресурс], - Режим доступа: https://vuzlit.ru/836806/leonardo_fibonachchi_vklad_v_nauku

[4]. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И., Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие, М.: Издательство «Наука», 1987.- 432 с.